

SUITF. Suites de fonctions

QCOP SUITF.1

2. Résultat. $x^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ et $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^x$.

3. Le continuité, la dérivabilité et le caractère borné ne sont pas préservés par la limite simple. Le reste l'est (le démontrer est un bon exercice).

QCOP SUITF.3

3. $f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n. \end{cases}$

On peut montrer que cette suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément en montrant que sa limite n'est pas continue : on utilise la contraposée du théorème précédemment énoncé et démontré.

QCOP SUITF.7

3. a) Calculer, par la technique de la « quantité conjuguée », $f_n(x) - \sqrt{x}$, et majorer cette quantité indépendamment de $x \in \mathbb{R}_+$.
 b) Non, puisque la fonction limite $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable.
 La convergence, même uniforme, de $(f_n)_n$ ne suffit pas.

QCOP SUITF.8

1. Utiliser le théorème d'approximation de Stone Weierstrass.
 2. b) Utiliser le théorème d'intégration sur un segment par convergence uniforme.
 3. Par linéarité, en utilisant l'hypothèse, on montre que $\int_0^1 P_n(t)f(t) dt = 0$, ce qui donne la nullité de l'intégrale $\int_0^1 (f(t))^2 dt$. On peut conclure par le théorème de positivité stricte de l'intégrale.