

Suites de fonctions

Sauf mention du contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Les fonctions considérées sont définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (que l'on note $\mathbb{K}$).

En MP/MPI, le cadre peut être élargi aux fonctions définies sur E et à valeurs dans F , où E et F sont des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Modes de convergence

QCOP SUITF.1



1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Rappeler la définition de « $(f_n)_n$ converge simplement vers f ».

2. Déterminer la limite simple des suites de fonctions $(f_n)_n$ dont f_n est donnée par :

$$\left| \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{array} \right.$$

3. Parmi les propriétés suivantes, lesquelles sont préservées par la limite simple ?

convexité ; croissance ; continuité ; parité
dérivabilité ; périodicité ; linéarité ; caractère borné.

QCOP SUITF.2



Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.

1. a) Rappeler la définition de « $(f_n)_n$ converge uniformément vers f ».

b) L'illustrer graphiquement.

2. Compléter et démontrer l'implication suivante :

$(f_n)_n$ converge simplement vers f ... $(f_n)_n$ converge uniformément vers f .

3. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée, et f est bornée. Montrer que :

$$(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \iff \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0.$$

4. Dans cette question, on considère que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \left| \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$

a) Montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

b) Soit $a \in [0, 1[$. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, a]$.

Continuité et caractère borné

QCOP SUITE.3



Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Soit $a \in I$.

1. Donner la définition de « f est continue en a » et de « pour tout n , f_n est continue en a ».
2. Énoncer et démontrer le théorème de continuité de f par convergence uniforme de $(f_n)_n$.
3. Donner un contre-exemple mettant en avant la nécessité de l'hypothèse de convergence uniforme.

QCOP SUITE.4



Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions bornées sur I . Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

1. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I . Que dire de f ?
2. Vérifier que la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ est bornée, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x}{n}. \end{cases}$$

3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : \begin{cases}]0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \min\left(n, \frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Théorème de la double limite

QCOP SUITE.5



1. Énoncer le théorème de la double limite.
2. Appliquer ce théorème aux fonctions

$$f_n : x \longmapsto \arctan(x) + \frac{1}{n}.$$

3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \arctan\left(\frac{x}{n+x}\right). \end{cases}$$

Intégration et dérivation

QCOP SUITE.6



Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

1. On suppose que les fonctions f_n sont continues et que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment J inclus dans I .

Soit $a \in I$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n : x \longmapsto \int_a^x f_n(t) dt$ et $F : x \longmapsto \int_a^x f(t) dt$.

- a) Justifier que les fonctions F_n et la fonction F sont bien définies.
b) Montrer que la suite $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment J inclus dans I .
c) Soit $b \in I$. Montrer que $\int_a^b f_n(t) dt \longrightarrow \int_a^b f(t) dt$.

2. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = n^2 x \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad f_n(x) = n^2 \left(\frac{2}{n} - x\right) \text{ si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right].$$

- a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Représenter l'allure du graphe de f_n et en déduire la valeur de $\int_0^1 f_n(t) dt$.
b) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.
c) En utilisant ce qui précède, montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

QCOP SUITE.7



1. Énoncer le théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ des suites de fonctions.
2. Le démontrer en utilisant le théorème d'intégration des suites de fonctions par convergence uniforme.
3. On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}. \end{cases}$$

- a) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
b) Le théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ des suites de fonctions s'applique-t-il ?

Approximation uniforme

QCOP SUITE.8

MP/MPI



Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Justifier l'existence d'une suite $(P_n)_n$ de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $[0, 1]$.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

2. **a)** Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)_n$ converge uniformément vers f^2 sur $[0, 1]$.

b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) dt = \int_0^1 (f(t))^2 dt$.

3. En déduire que f est la fonction nulle sur $[0, 1]$.