

## SERN. Séries numériques

### QCOP SERN.1

1. Utiliser la règle de comparaison pour les séries à termes positifs en écrivant que  $a_n = o(b_n)$  est équivalent à :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon, \quad 0 \leq a_n \leq \varepsilon b_n.$$

2. Utiliser ce qui précède en remarquant que  $n^2 u_n \rightarrow 0$  est équivalent à  $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

3. a) Fixer  $\gamma \in ]1, \alpha[$  (possible car  $\alpha > 1$ ) et montrer que  $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ .

Conclure à l'aide de la première question, sachant que  $\sum_n \frac{1}{n^\gamma}$  converge (série de Riemann,  $\gamma > 1$ ).

- b) Fixer  $\gamma \in ]\alpha, 1[$  (possible car  $\alpha < 1$ ) et montrer que  $\frac{1}{n^\gamma} = o\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right)$ .

Conclure par contraposée de la première question, sachant que  $\sum_n \frac{1}{n^\gamma}$  diverge.

### QCOP SERN.2

1. Résultat. La série  $\sum_n a_n$  converge.

Il s'agit de démontrer la règle de D'Alembert pour les séries à termes positifs. Une version plus guidée est disponible dans la fiche QCOP SUP SER. En particulier, on montre que, à partir d'un certain rang, le terme  $a_n$  est majoré par un terme géométrique, c'est-à-dire que la convergence de la suite  $(a_n)_n$  est au moins géométrique.

2. Résultat. La série  $\sum_n a_n$  diverge.

3. Résultat. On ne peut rien dire.

On peut prendre  $a_n = \frac{1}{n}$  et  $a_n = \frac{1}{n^2}$  qui fournissent un résultat différent.

4. On note  $R := \frac{1}{\ell}$ .

Résultat. La série  $\sum_n a_n x^n$  converge pour  $x \in ]-R, R[$  et diverge pour  $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$ . Pour  $x = \pm R$ , on ne peut rien dire.

Il s'agit d'appliquer la règle de D'Alembert avec, lorsque  $x \neq 0$ , le terme  $a_n \leftarrow a_n x^n$ .

### QCOP SERN.3

1. ♦ Utiliser la décroissance de  $t \mapsto \frac{1}{t}$  sur le segment  $[k, k+1]$ , et la croissance de l'intégrale sur ce même segment (de longueur 1), pour montrer que :

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k-1}.$$

♦ Sommer les inégalités obtenues, en faisant bien attention aux bornes.

2. Utiliser la minoration de  $H_n$  fournie par la question précédente.

3. Montrer que  $\frac{H_n}{\ln(n)} \rightarrow 1$  à l'aide de l'encadrement.

4. a) Le caractère minoré vient de l'encadrement. Pour montrer que  $(\delta_n)_n$  est décroissante, on pourra notamment utiliser que :

$$\forall t > -1, \quad \ln(1+t) \leq t.$$

- b) En déduire que  $(\delta_n)_n$  converge et noter  $\gamma$  sa limite. Par encadrement, on a  $\gamma \geq 0$ .

### QCOP SERN.4

1. ♦ Utiliser la décroissance de  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  sur le segment  $[k, k+1]$ , et la croissance de l'intégrale sur ce même segment (de longueur 1), pour montrer que :

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{(k-1)^\alpha}.$$

♦ Sommer les inégalités obtenues, en faisant bien attention aux bornes.

2. Prendre  $N = 1$  et  $M = n$  dans la relation de la première question.

3. Prendre  $N = n$  et  $M \rightarrow +\infty$  dans la relation de la première question.

### QCOP SERN.5

1. On peut par exemple établir l'encadrement :

$$I_n + \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq S_n \leq \frac{1}{2(\ln 2)^\beta} + I_n.$$

2. Utiliser la première question. Notamment, il faudra calculer  $I_n$ .

3. Utiliser la première question avec  $\beta = 1$ .

### QCOP SERN.7

3. Utiliser que  $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{k}$ .

4. a) Utiliser que  $a_n \rightarrow \ell$  s'écrit  $a_n - \ell = o(1)$ .

- b) Puisque  $a_n \rightarrow +\infty$ , la suite  $(a_n)_n$  est positive à partir d'un certain rang. On peut écrire  $1 = o(a_n)$  et appliquer les mêmes arguments de sommation.