

Séries numériques

La fiche de QCOP, niveau SUP, sur les séries (SER) fournit une vue détaillée des résultats au programme de première année. Il est conseillé de la travailler en complément de celle-ci.

Séries à termes positifs

QCOP SERN.1



1. Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites réelles positives telles que $a_n = o(b_n)$.
Montrer que, si $\sum_n b_n$ converge, alors $\sum_n a_n$ converge.
2. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique telle que $n^2 u_n \rightarrow 0$.
Montrer que $\sum_n u_n$ converge.
3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que, si $\alpha > 1$, alors $\sum_n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.

b) Montrer que, si $\alpha < 1$, alors $\sum_n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.

QCOP SERN.2



Soit $(a_n)_n$ une suite réelle strictement positive. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \ell$.

1. a) Montrer que, si $\ell \in [0, 1[$, alors $\sum_n a_n$ converge.
b) Quel lien peut-on faire avec les séries géométriques ?
2. Que peut-on dire lorsque $\ell \in]1, +\infty[$?
3. Que peut-on dire lorsque $\ell = 1$?
4. Pour quelles valeurs réelles x la série $\sum_n a_n x^n$ converge-t-elle ? Pour lesquelles diverge-t-elle ?

Applications de la comparaison série-intégrale

QCOP SERN.3



On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Soit $n \geq 2$. Montrer que :

$$I_n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq 1 + I_n \quad \text{où } I_n := \int_1^n \frac{1}{t} dt.$$

2. Montrer que la série $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge.

3. Donner un équivalent simple de H_n .

4. Soit $(\delta_n)_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \ln(n) + \delta_n$.

a) Montrer que $(\delta_n)_n$ est décroissante et minorée.

b) En déduire qu'il existe $\gamma \geq 0$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

QCOP SERN.4



Soit $\alpha > 0$ différent de 1.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $M > N$. Montrer que :

$$I_{N,M} + \frac{1}{M^\alpha} \leq \sum_{k=N}^M \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{N^\alpha} + I_{N,M} \quad \text{où } I_{N,M} := \int_N^M \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

2. On suppose que $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

3. On suppose que $\alpha \in]1, +\infty[$. Montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

QCOP SERN.5 ★



Soit $\beta > 0$.

1. On note, pour $n \geq 2$, $S_n := \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta}$ et $I_n := \int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt$.

À l'aide d'une comparaison série-intégrale, encadrer la somme S_n par l'intégrale I_n .

2. Montrer que la série $\sum_n \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Indication. On distinguera les cas $\beta \neq 1$ et $\beta = 1$.

3. Montrer que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$.

Somation des relations de comparaison

QCOP SERN.6

MP/MPI



1. Énoncer les théorèmes de sommation des relations de comparaison dans le cas des séries convergentes.
2. Établir un de ces théorèmes dans le cas de votre choix.
3. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On admet qu'il existe $\gamma \geq 0$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

- a) Montrer que $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k} + \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right)$.
- b) En déduire que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

QCOP SERN.7

MP/MPI



1. Énoncer les théorèmes de sommation des relations de comparaison dans le cas des séries divergentes.
2. Établir un de ces théorèmes dans le cas de votre choix.

Les deux applications sont indépendantes.

3. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

4. Soit $(a_n)_n$ une suite réelle.

- a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$a_n \longrightarrow \ell \quad \implies \quad \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \longrightarrow \ell.$$

- b) Montrer que le résultat reste vrai si $\ell = +\infty$ (i.e. la suite $(a_n)_n$ diverge vers $+\infty$).