

SERF. Séries de fonctions

QCOP SERF.1

4. Montrer que cette série de fonctions converge normalement, en remarquant que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n^2 + x^2} \right| = \frac{1}{n^2}.$$

QCOP SERF.3

2. a) Résultat. $S(x) = 1$ si $x \in [0, 1[$ et $S(1) = 0$.
 b) Résultat. Non.
 c) Utiliser la contraposée du théorème de continuité.

QCOP SERF.4

2. Appliquer le théorème de la double limite à la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + x^2}$.
 3. Utiliser la contraposée du théorème de la double limite, en le point $a = 1$.

QCOP SERF.7

1. Il s'agit d'une série de Riemann convergente.
 2. Faire une majoration.
 3. Utiliser le théorème de continuité des séries de fonctions.
 4. Utiliser le théorème de régularité $\mathcal{C}^2$ des séries de fonctions.

Résultat. $\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x}.$

5. Utiliser le théorème de la double limite. En effet, $\frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$
 6. a) Commencer par montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{k^x},$$

puis sommer ces inégalités entre 1 et n , puis passer à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- b) Résultat. $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty.$