

Séries de fonctions

Sauf mention du contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Les fonctions considérées sont définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (que l'on note $\mathbb{K}$).

En MP/MPI, le cadre peut être élargi aux fonctions définies sur E et à valeurs dans F , où E et F sont des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Modes de convergence

QCOP SERF.1



Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I , à valeur dans $\mathbb{K}$.

1. Rappeler les définitions de convergence simple, convergence uniforme, convergence absolue, et convergence normale de $\sum_n f_n$ sur I .
2. a) Sur un schéma, représenter les implications liant les quatre modes de convergence précédemment évoqués.
b) Montrer l'implication entre la convergence uniforme et la convergence normale.
c) Montrer l'implication entre la convergence uniforme et la convergence absolue.
3. Pourquoi est-il difficile de montrer la convergence uniforme ? Quel est l'apport de la convergence normale ?
4. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

QCOP SERF.2



On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{(-1)^n}{n+x} \end{cases}$.

1. Rappeler le théorème spécial des séries alternées, ainsi que la majoration du reste qu'il fournit.
2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
3. La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?
4. Que peut-on en déduire sur les implications entre les différents modes de convergence ?

Propriétés préservées par convergence uniforme

QCOP SERF.3



1. Énoncer et démontrer le théorème assurant la continuité de la somme d'une série de fonctions.
2. On considère la série de fonctions $\sum_n f_n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n(1-x). \end{cases}$$

- a) Montrer que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement et calculer sa limite $S(\cdot)$.
- b) La fonction limite $S(\cdot)$ est-elle continue ?
- c) En déduire que la convergence de $\sum_n f_n$ n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

QCOP SERF.4



1. Énoncer le théorème de la double limite pour les séries de fonctions.
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
3. En utilisant le théorème de la double limite, montrer que la série de fonctions $\sum_n x^n(1-x)$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

QCOP SERF.5



1. Énoncer et démontrer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment pour les séries de fonctions.
2. a) À l'aide de la série de fonctions $\sum_n (x \mapsto x^n)$, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Indication. Utiliser le théorème précédemment énoncé sur un segment $[0, a]$ avec $a \in [0, 1[$.

- b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \left(x \mapsto \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right)$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Indication. Utiliser le théorème des séries alternées.

- c) En déduire que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ est continue sur $[0, 1]$.

- d) Conclure que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\ln(2)$.

QCOP SERF.6

1. Énoncer et démontrer le théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ pour les séries de fonctions.
2. Soit $a \in \mathbb{K}$ fixé. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \frac{t^n a^n}{n!}$.
 - a) Montrer que la série de fonctions $\sum_n e_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note $E(\cdot)$ sa limite.
 - b) Montrer que, pour tout $M \geq 0$, la série de fonctions $\sum_n e_n$ converge normalement sur le segment $[-M, M]$.
 - c) Montrer que $E(\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer $E'(\cdot)$.
 - d) Que peut-on démontrer avec les théorèmes de régularité $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$?

L'élément fixé $a \in \mathbb{K}$ peut être remplacé par $u \in L(E)$ avec E un espace vectoriel normé de dimension finie, ou par $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice.

Étude de la fonction zêta de Riemann

QCOP SERF.7 ★

Pour $x > 1$, on considère $\zeta(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Justifier que le nombre $\zeta(x)$ est bien défini pour tout $x > 1$.
2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \left(x \mapsto \frac{1}{n^x} \right)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$.
3. Montrer que la fonction $\zeta(\cdot)$ est continue sur $]1, +\infty[$.
4. a) Montrer que $\zeta(\cdot)$ est deux fois dérivable et exprimer $\zeta''(x)$ pour $x > 1$.
b) En déduire que $\zeta(\cdot)$ est convexe.
5. Montrer que $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.
6. a) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que :

$$\forall x > 1, \quad \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x).$$

- b) En déduire que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$ et déterminer la limite de $\zeta(\cdot)$ en 1^+ .