

Séries entières

Rayon de convergence

QCOP SERE.1



Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière, dont on note R le rayon de convergence.

1. Énoncer et démontrer le lemme d'Abel.
2. Définir le rayon de convergence R , ainsi que le disque de convergence de la série entière.
3. En déduire le comportement de $\sum_n a_n z^n$ sur :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \quad \text{et} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}.$$

4. Comment adapte-t-on le vocabulaire pour des séries entières de la variable réelle ?

QCOP SERE.2



1. Que peut-on dire du comportement d'une série entière au bord de son disque de convergence ?
2. On considère les trois séries entières $\sum_n z^n$, $\sum_n \frac{z^n}{n}$ et $\sum_n \frac{z^n}{n^2}$.
 - a) Montrer que ces trois séries entières ont pour rayon de convergence 1.
 - b) Étudier, en $z = 1$ et $z = -1$, la nature de ces trois séries.
 - c) Qu'en conclure sur le comportement possible d'une série entière sur le bord de son disque de convergence ?

QCOP SERE.3



1. Rappeler la règle de D'Alembert pour les séries numériques.
2. Comment la règle de D'Alembert peut-elle nous permettre de calculer le rayon de convergence d'une série entière ?
3. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_n n^\alpha z^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé.
4. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_n 2^n z^{2^n}$.

QCOP SERE.4



Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b .

1. On suppose qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_0, \quad |a_n| \leq |b_n|.$$
 Comparer R_a et R_b .
2. Que peut-on dire lorsque $|a_n| \sim |b_n|$?
3. On considère que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$
 Que peut-on dire ?

QCOP SERE.5

Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b .

On note R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière $\sum_n (a_n + b_n) z^n$.

1. Montrer que $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$.
2. Que peut-on affirmer lorsque $R_a \neq R_b$?
3. Donner un exemple mettant en avant la nécessité de supposer $R_a \neq R_b$.

QCOP SERE.6

Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b .

On note R_c le rayon de convergence du produit de Cauchy de ces deux séries.

1. Rappeler la définition du produit de Cauchy des séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$.
2. Montrer que $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.
3. Donner un exemple où $R_c > \min(R_a, R_b)$.
4. Utiliser ce qui précède pour montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Propriétés analytiques de la somme

QCOP SERE.7

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

1. Sur quel domaine la série entière converge-t-elle normalement ? Le démontrer.
2. Sur quel domaine la fonction somme est-elle continue ? Le démontrer.
3. Que peut-on dire de plus si la série numérique $\sum_n a_n R^n$ converge ?

QCOP SERE.9

MP/MPI



1. Énoncer le théorème d'Abel radial.

2. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

3. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

QCOP SERE.8

1. Énoncer et démontrer le théorème d'intégration terme à terme pour les séries entières de la variable réelle.
2. Que dire du rayon de convergence de la série primitive ?
3. À l'aide de ce théorème, retrouver le développement en série entière des fonctions :
 $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \arctan(x)$.

QCOP SERE.10

1. Énoncer et démontrer le théorème de dérivation terme à terme pour les séries entières de la variable réelle.
2. Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière. Déterminer l'expression des coefficients a_n à l'aide des dérivées successives en 0 en de la somme.
3. En déduire que, si deux séries entières coïncident au voisinage de 0, alors leurs coefficients sont égaux.

Développement en série entière

QCOP SERE.11



1. Donner la définition de fonction développable en série entière au voisinage de 0 sur $] -R, R[$ avec $R > 0$.
2. Rappeler le lien, dans le cas réel, avec la série de Taylor de la fonction en 0.
3. Énoncer et démontrer le théorème d'unicité du développement en série entière.
4. Que peut-on dire des coefficients du développement en série entière d'une fonction paire ? d'une fonction impaire ?

QCOP SERE.12



1. Soit $z \in \mathbb{C}$.
 - a) Déterminer les dérivées k -ièmes de la fonction $x \mapsto \exp(zx)$.
 - b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(zx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} x^n.$$

2. En déduire les développements en série entière des fonctions $\exp(\cdot)$, $\cosh(\cdot)$, $\sinh(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ et $\sin(\cdot)$.

QCOP SERE.13



Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

On considère la fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ définie sur $] -1, +\infty[$ et l'équation différentielle :

$$(1+x)y' - \alpha y = 0. \quad (E_\alpha)$$

1. Vérifier que f_α est solution sur $] -1, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_α) .
2. On suppose qu'il existe une série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et de somme $S_\alpha(\cdot)$, vérifiant l'équation (E_α) sur $] -R, R[$.

- a) Établir une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n pour $n \in \mathbb{N}$.
- b) En déduire l'expression de a_n pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de α , a_0 et n .

3. Vérifier que l'expression de a_n ainsi obtenue permet bien de définir une série entière de rayon R strictement positif.
4. Conclure que :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

QCOP SERE.14



1. Soit f une fonction. Compléter et démontrer l'implication suivante :
 f est de classe $\mathcal{C}^\infty$... f est développable en série entière.

2. On considère la fonction définie sur $] -1, 1[$:

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

3. Donner un contre-exemple pour l'implication fautive en général de la première question.