

Réduction

Dans toute la fiche, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sauf mention du contraire, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Diagonalisation

QCOP RED.1



Soit $u \in L(E)$.

- Montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes :

- u est diagonalisable
- $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$
- $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_{\lambda}(u))$.

- On suppose que u admet n valeurs propres distinctes. Que peut-on conclure ?
- La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

QCOP RED.3



- Montrer qu'un endomorphisme de E est diagonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
- Montrer qu'un projecteur et une symétrie de E sont diagonalisables, sans calcul.
- Soit $u \in L(E)$ tel qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = \text{Id}_E$.
 - Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors u est diagonalisable.
 - Que dire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

QCOP RED.2



Soit $u \in L(E)$ tel que χ_u est scindé.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ les racines de χ_u et $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ les multiplicités respectives.

- Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Rappeler l'inégalité entre m_k et $\dim(E_{\lambda_k}(u))$.
- Montrer l'équivalence entre :
 - u est diagonalisable
 - $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \dim(E_{\lambda_k}(u)) = m_k$.
- Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que :
 $\chi_A = (X - 1)(X - 2)^2$ et $\text{rg}(A - 2I_3) = 2$.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

QCOP RED.4

MP/MPI



Soit $u \in L(E)$, de polynôme minimal π_u .

- Montrer l'équivalence entre :
 - u est diagonalisable
 - π_u est simplement scindé.
- On suppose u diagonalisable.
Montrer que $\deg(\pi_u) = \text{Card}(\text{Sp}(u))$.
- Soit F un sous-espace stable par u . On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F .
 - Montrer que π_{u_F} divise π_u .
 - Montrer que, si u est diagonalisable, alors u_F aussi.

Trigonalisation et nilpotence

QCOP RED.5



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- Montrer que, si A est trigonalisable, alors χ_A est scindé.
 - La réciproque est-elle vraie ?
- En déduire que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- Exprimer, à l'aide des valeurs propres de A et de leur multiplicité, les nombres $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$.
- Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On considère la matrice $R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
 - La matrice R_θ est-elle trigonalisable sur $M_2(\mathbb{R})$?
 - Montrer que R_θ est diagonalisable sur $M_2(\mathbb{C})$.

QCOP RED.6



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente non nulle.

- Déterminer $\text{Sp}(N)$ et montrer que N n'est pas diagonalisable.
- On note p l'indice de nilpotence de N .
 - Justifier que p est correctement défini et que $p \geq 2$.
 - Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $N^{p-1}X \neq 0_{n,1}$.
Montrer que la famille $(X, NX, \dots, N^{p-1}X)$ est libre.
 - En déduire que $p \leq n$.
- Déterminer le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de N .

QCOP RED.7



1. Soit $N \in M_2(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente non nulle.

- Justifier qu'il existe $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ telle que N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- En déduire que N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$. On suppose que $\chi_A = (X - \lambda)^2$ et $A \neq \lambda I_2$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Montrer que $A - \lambda I_2$ est nilpotente non nulle.

- En déduire que A est semblable à $T := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

- Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$.

Applications de la réduction

QCOP RED.8



Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ telles que :

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad |\lambda_i| < 1.$$

On considère l'espace :

$$S_A := \left\{ (X_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = AX_k \right\}.$$

1. Montrer que S_A est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

Indication. On pourra utiliser un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. Soit $(X_k)_k \in S_A$.

a) Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$, le terme X_k en fonction de A et X_0 .

b) Montrer que $X_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ (i.e. chaque composante de X_k tend vers 0).

QCOP RED.9



Soit $u \in L(E)$, diagonalisable, de spectre $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note $p_i \in L(E)$ le projecteur sur $E_{\lambda_i}(u)$ associé à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u)$.

1. Soient $i, j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tels que $i \neq j$. Montrer que $p_i \circ p_j = 0_{L(E)}$.

2. Montrer que $\text{Id}_E = \sum_{i=1}^r p_i$ et que $u = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i$.

3. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $u^k = \sum_{i=1}^r \lambda_i^k p_i$.

b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer $P(u)$ en fonction des λ_i et des p_i .

4. On suppose que u est bijectif. Exprimer u^{-1} en fonction des λ_i et des p_i .