

POLEND. Polynômes d'endomorphismes

QCOP POLEND.1

3. Le polynôme $P_{D_\lambda} := X - \lambda$ annule D_λ et $P_{D_{\lambda,\mu}} := (X - \lambda)(X - \mu)$ annule $D_{\lambda,\mu}$.
Le polynôme $P_{T_\lambda} := (X - \lambda)^2$ annule T_λ et $P_{T_{\lambda,\mu}} := (X - \lambda)(X - \mu)$ annule $T_{\lambda,\mu}$.

QCOP POLEND.5

2. a) Résultat. $\chi_A(X) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$.
b) Résultat. $\text{Tr}(A) = \lambda + \mu$ et $\det(A) = \lambda\mu$.
c) Résultat. $\det(A) > 0$ et $\text{Tr}(A) > 0 \implies \lambda, \mu > 0$
 $\det(A) > 0$ et $\text{Tr}(A) < 0 \implies \lambda, \mu < 0$
 $\det(A) < 0 \implies \lambda$ et μ sont opposés.

QCOP POLEND.6

3. On peut prendre $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

QCOP POLEND.7

On note $\chi_A(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$.

1. Résultat. $\chi_A(A) = 0_n$ i.e. $a_0I_n + a_1A + \dots + a_nA^n = 0_n$.
2. Résultat. Puisque $a_0 = (-1)^n \det(A) \neq 0$, $A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I_n)$.
3. a) Résultat. $A^2 = \text{Tr}(A)A - \det(A)I_2$.
b) Résultat. C'est un espace vectoriel de dimension 2, i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{K}$ tels que $A^k = \alpha_k I_n + \beta_k A$.

On peut pousser le raisonnement et montrer que les puissances de A vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, et donc en déduire une expression explicite de A^k .

QCOP POLEND.9

1. **a) Résultat.** $\chi_u(u) = 0_{L(E)}$.
b) Utiliser le théorème de décomposition des noyaux avec les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$.
2. Il s'agit du noyau d'un polynôme en u .
3. Dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{k=1}^r C_{\lambda_k}(u)$, la matrice est diagonale par blocs.
4. **a)** C'est par définition de l'endomorphisme induit. Remarquons que u_k est un endomorphisme dans $L(C_{\lambda_k}(u))$.
b) Le premier point est immédiat si l'on connaît le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent (qui sera vu à un moment dans l'année, au plus tard lorsque la trigonalisation aura été évoquée).
Résultat. $\chi_{u_k} = (X - \lambda_k)^{d_k}$.
c) Utiliser l'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles d'un polynôme avec l'égalité

$$\chi_u = \prod_{k=1}^r \chi_{u_k}.$$

QCOP POLEND.10

2. Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.
3. **Résultat.**

$$\begin{array}{ll} \pi_{D_\lambda} = X - \lambda & \pi_{D_{\lambda,\mu}} = (X - \lambda)(X - \mu) \\ \pi_{T_\lambda} = (X - \lambda)^2 & \pi_{T_{\lambda,\mu}} = (X - \lambda)(X - \mu) \\ \pi_P = X(X - 1) & \pi_S = (X - 1)(X + 1) \end{array} \quad \pi_N = X^P.$$

QCOP POLEND.12

3. **a)** Effectuer la division euclidienne de P par π_u .