

Polynômes d'endomorphismes

Dans toute la fiche, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sauf mention du contraire, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Polynômes annulateurs

QCOP POLEND.1



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- a)** Rappeler la dimension de l'espace $M_n(\mathbb{K})$.
b) Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est liée.
c) En déduire que la matrice A possède un polynôme annulateur non nul.
- a)** Justifier l'existence du plus petit entier $d \in \llbracket 0, n^2 \rrbracket$ tel que $(I_n, A, A^2, \dots, A^d)$ est liée.
b) Montrer que la matrice A possède un polynôme annulateur, non nul, de degré d .
- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$. Déterminer un polynôme annulateur de petit degré pour les matrices

$$D_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad D_{\lambda, \mu} := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad T_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad T_{\lambda, \mu} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

QCOP POLEND.2



Soit $u \in L(E)$. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

- Rappeler comment est défini $P(u)$ à partir des coefficients de P et justifier que $P(u) \in L(E)$.
- Montrer que $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$.
- Montrer que $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.
- Montrer que, si P annule u , alors PQ annule u .
- Montrer que $\text{Ker}(P(u))$ est stable par u .

QCOP POLEND.3



Soit $u \in L(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u . Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur propre associé.

- Montrer que $(P(u))(x) = P(\lambda) \cdot x$.
- Montrer que, si P est annulateur de u , alors λ est racine de P .
- Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs propres possibles de u :

$$u^2 = u ; \quad u^2 = \text{Id}_E ; \quad u \text{ nilpotent } (\exists p \in \mathbb{N}^* : u^p = 0_{L(E)}).$$

Polynôme caractéristique

QCOP POLEND.4



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Définir le polynôme caractéristique de A , noté χ_A .
2. **a)** Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que A et B sont semblables. Montrer que $\chi_A = \chi_B$.
b) Définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.
3. Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire, d'une matrice diagonale par blocs, d'une matrice triangulaire par blocs.
4. Soit $u \in L(E)$. Soit F un sous-espace stable par u . On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F . Montrer que χ_{u_F} divise χ_u (i.e. $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : \chi_u = Q \chi_{u_F}$).

QCOP POLEND.5



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, dont on note χ_A le polynôme caractéristique.

1. **a)** Quel est le degré de χ_A et que vaut son coefficient dominant ?
b) Que vaut son coefficient de degré $n - 1$?
c) Retrouver le coefficient constant de χ_A .
2. On se place dans le cas $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose que χ_A admet deux racines réelles λ et μ .
a) Écrire χ_A sous forme développée.
b) Rappeler les relations coefficients-racines liant $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$ à λ et μ .
c) Que dire de λ et μ dans les cas suivants :

$$\det(A) > 0 \text{ et } \text{Tr}(A) > 0 ; \quad \det(A) > 0 \text{ et } \text{Tr}(A) < 0 ; \quad \det(A) < 0.$$

QCOP POLEND.6



Soit $u \in L(E)$, dont on note χ_u le polynôme caractéristique. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que λ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est racine de χ_u .
2. On suppose que λ est valeur propre de u . On note $m_\lambda(u)$ sa multiplicité en tant que racine de χ_u . Montrer que $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda(u)$.
3. Donner un exemple d'endomorphisme (ou de matrice) pour lequel cette inégalité est stricte.

QCOP POLEND.7



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton pour la matrice A .
2. On suppose A inversible. Exprimer A^{-1} en fonction des puissances de A .
3. On se place dans le cas $n = 2$.
a) Écrire A^2 sous la forme $\alpha I_2 + \beta A$ avec α et β dépendant de $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$.
b) En déduire la dimension de l'espace vectoriel engendré par les puissances de A .

Décomposition des noyaux

QCOP POLEND.8

MP/MPI



1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes premiers entre eux.

a) Rappeler le théorème de Bézout pour les polynômes P et Q .

b) Montrer le *lemme des noyaux* :

$$\text{Ker}((PQ)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u)).$$

2. Généraliser le lemme des noyaux à une famille de $r \in \mathbb{N}^*$ polynômes $(P_1, \dots, P_r)$ supposés premiers entre eux deux à deux.

3. Soit $u \in L(E)$ tel que $u^3 = u$. Montrer que :

$$E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id}_E).$$

QCOP POLEND.9



MP/MPI



Soit E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in L(E)$.

On note $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ et $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$.

Pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on définit le *sous-espace caractéristique* $C_{\lambda_k}(u) := \text{Ker}((u - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k})$.

1. a) Rappeler le théorème de Cayley-Hamilton.

b) Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^r C_{\lambda_k}(u)$.

2. Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Justifier que $C_{\lambda_k}(u)$ est un sous-espace vectoriel stable par u .

Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note u_k l'endomorphisme induit par u sur le sous-espace $C_{\lambda_k}(u)$.

3. Justifier que $\chi_u = \prod_{k=1}^r \chi_{u_k}$.

4. Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. On note $d_k := \dim(C_{\lambda_k}(u))$.

a) Justifier que $(u_k - \lambda_k \text{Id})^{m_k} = 0_{L(C_{\lambda_k}(u))}$.

b) Montrer (ou admettre) que $\chi_{u_k - \lambda_k \text{Id}} = X^{d_k}$. En déduire l'expression de χ_{u_k} .

c) Conclure que $d_k = m_k$.

Polynôme minimal

Le polynôme minimal est noté ici π_u . Les deux notations π_u et μ_u sont inscrites dans le programme.

QCOP POLEND.10

MP/MPI



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Rappeler la définition du polynôme minimal de M .
2. Montrer que $\pi_M \mid \chi_M$ et en déduire une majoration de $\deg(\pi_M)$.
3. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Déterminer le polynôme minimal des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ suivantes :

$$D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \quad D_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} ; \quad T_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \quad T_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} ;$$

P telle que $P^2 = P$, $P \neq 0_n$ et $P \neq I_n$; S telle que $S^2 = I_n$, $S \neq \pm I_n$;

N nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$ ($N^p = 0_n$ et $N^{p-1} \neq 0_n$).

QCOP POLEND.11

MP/MPI



Soit $u \in L(E)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que :
 λ est valeur propre de $u \iff \lambda$ est racine de π_u .
2. Donner une matrice M telle que $\pi_M = \chi_M$ et une autre matrice M telle que $\pi_M \neq \chi_M$.
3. Déterminer le spectre de u dans les cas suivants :
 u est un projecteur ; u est une symétrie ; u est nilpotent ($\exists p \in \mathbb{N}^* : u^p = 0_{L(E)}$).

QCOP POLEND.12



MP/MPI



Soit $u \in L(E)$.

On note $\text{Annul}(u)$ l'ensemble des polynômes annulateurs de u .

1. Montrer que $\text{Annul}(u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
2. Justifier l'existence de π_u non nul, unitaire, de degré minimal parmi les éléments non nuls de $\text{Annul}(u)$.
3. a) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :
 $\pi_u \mid P \iff P \in \text{Annul}(u)$.
 b) En déduire que $\text{Annul}(u) = \pi_u \mathbb{K}[X]$.

QCOP POLEND.13



MP/MPI



Soit $u \in L(E)$.

On note $\mathbb{K}[u] := \text{Vect} \{ u^k ; k \in \mathbb{N} \}$.

On note $d_u := \deg(\pi_u)$.

1. Montrer que $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d_u-1})$ est une famille libre de $L(E)$.
Indication. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la minimalité de d_u .
2. Montrer que $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d_u-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ et en déduire la dimension de $\mathbb{K}[u]$.
3. Justifier que $d_u \geq 1$.
4. Montrer que :
 $d_u = 1 \iff u$ est une homothétie.