

Passage à la limite sous l'intégrale

QCOP LIMINT.1



1. Énoncer le théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur un intervalle I .
2. Laquelle des hypothèses du théorème entraîne que les fonctions f_n sont intégrables sur I ?
3. Soit f une fonction continue et intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-\frac{t}{n}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

QCOP LIMINT.2



1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme dans le cas d'une suite $(f_n)_n$ de fonctions définies sur un intervalle I .
2. a) Montrer (ou admettre) que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

- b) Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

QCOP LIMINT.3



On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geq 0$, $g_n(t) := \frac{(-1)^n}{(1+t^2)^n}$.

1. a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
 b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt$ diverge.
 c) Que peut-on conclure quant à l'applicabilité du théorème d'intégration terme à terme ?
2. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $S_N(\cdot) := \sum_{n=1}^N g_n(\cdot)$.
 a) Pour $t \geq 0$, exprimer la somme $S_N(t)$.
 b) Appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(S_N)_{N \geq 1}$.
 c) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.
3. Que nous a montré cet exercice ?