

INTG. Intégrales généralisées

QCOP INTG.1

2. Résultat. $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge $\iff a < 0$.
3. On a $\int_0^{+\infty} e^{-n^2 t} dt = \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

QCOP INTG.2

4. D'après ce qui précède, non. Ce qu'il faut retenir de cette question pour la suite : lorsque l'on veut montrer la convergence d'une intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ par comparaison et que l'on recourt à une intégrale de Riemann (typiquement pour dire « $f(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ »), il ne faut pas oublier de traiter à part la convergence de l'intégrale sur $]0, 1]$.

QCOP INTG.3

2. a) Procéder par intégration par parties.
b) Raisonner par récurrence avec la question précédente.

QCOP INTG.5

3. Les résultats suivants peuvent aider :

$$0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}, \quad \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}, \quad t^2 \ln(t) e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

QCOP INTG.6

1. Utiliser le théorème de divergence par minoration pour les fonctions, en raisonnant sur les segments $[a, x]$.
2. a) Fixer $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \geq A$, $0 \leq \frac{|\ell|}{2} \leq |f(t)| \leq |\ell|$.
b) Construire une fonction en triangles, des triangles d'aire $\frac{1}{n^2}$ ou minorée par $\frac{1}{n^2}$.

QCOP INTG.7

3. Utiliser l'équivalent $t^2 + e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^2$, le théorème d'intégration des équivalents dans le cas d'intégrales convergentes, et la valeur de l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.

QCOP INTG.8

3. Utiliser l'équivalent $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, le théorème d'intégration des équivalents dans le cas d'intégrales divergentes, et la valeur de l'intégrale $\int_x^1 \frac{1}{t} dt$.