

Intégrales généralisées

Intégrales de référence

QCOP INTG.1



Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Soient $A, B \in \mathbb{R}$.

Définir « l'intégrale $\int_A^B e^{-at} dt$ converge ».

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge.
3. La série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} e^{-n^2 t} dt$ converge-t-elle ?

QCOP INTG.2



Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Soient $A, B \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\int_A^B \frac{1}{t^\alpha} dt$.
2. Compléter et démontrer :
 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge $\iff \alpha \dots 1$.
3. Compléter et démontrer :
 $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge $\iff \alpha \dots 1$.
4. Existe-t-il α tel que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ?

Intégration par parties, changement de variable

QCOP INTG.3



1. a) Énoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.
 b) Le démontrer, supposant connu le théorème pour les intégrales sur un segment.
2. On note, pour $x > 0$, $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et on admet la convergence de cette intégrale.
 a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.
 b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

QCOP INTG.4



1. Énoncer le théorème du changement de variable pour les intégrales généralisées.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Rappeler la condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
 En déduire que $\int_a^b \frac{1}{|t-a|^\alpha} dt$ et $\int_a^b \frac{1}{|t-b|^\alpha} dt$ convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Théorèmes de comparaison

QCOP INTG.5



1. Énoncer le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives.
2. Quels résultats de comparaison utilisant les équivalents, $\alpha(\cdot)$ et $\mathcal{O}(\cdot)$ peut-on établir ?
3. Montrer que les intégrales suivantes convergent :

$$\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt, \quad \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt, \quad \int_2^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt.$$

QCOP INTG.6



Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux telles que $0 \leq f \leq g$.

Montrer que, si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge.

2. Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est intégrable} \\ f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \ell \end{array} \right\} \implies \ell = 0.$$

b) À l'aide d'un contre exemple, montrer que, en général :

$$f \text{ est intégrable} \not\implies f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Intégration des relations de comparaison

QCOP INTG.7

MP/MPI



1. Énoncer les théorèmes d'intégration des relations de comparaison dans le cas d'intégrales convergentes.
2. Le démontrer dans un cas de votre choix.
3. Montrer que :

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2 + e^{-t}} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

QCOP INTG.8

MP/MPI



1. Énoncer les théorèmes d'intégration des relations de comparaison dans le cas d'intégrales divergentes.
2. Le démontrer dans un cas de votre choix.
3. Montrer que :

$$\int_x^1 \frac{1}{\sin(t)} dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x).$$