

EVN. Espaces vectoriels normés

QCOP EVN.1

2. a) Utiliser l'inégalité triangulaire avec $x = (x - y) + y$ et $y = (y - x) + x$.
 b) Résultat. L'application $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne.
3. b) On a $\|x\|_\infty = 1$, $\|y\|_\infty = 1$ et $\|x + y\|_\infty = 2$, mais x et y ne sont pas positivement colinéaires.

QCOP EVN.2

2. Utiliser la propriété de séparation de la norme.
3. Puisque l'application u est linéaire, elle est injective si, et seulement si, son noyau est réduit à $\{0_E\}$, i.e.

$$\forall x \in E, \quad [u(x) = 0_E \iff x = 0_E].$$

QCOP EVN.4

3. Pour l'inégalité $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$, utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

QCOP EVN.5

3. a) Pour l'inégalité $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$, utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 b) Considérer, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ pour montrer que :

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}, \quad \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = 1,$$

puis passer à la limite.

QCOP EVN.6

3. b) Résultat. Nonn, cette équivalence devient fausse.

◆ Toute application constante non nulle est 0-lipschitzienne mais ne vérifie pas la deuxième propriété.

◆ La fonction $x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ vérifie la deuxième propriété mais n'est pas lipschitzienne.