

Espaces vectoriels normés

Propriétés des normes

QCOP EVN.1



Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- Rappeler l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|$.
- Soient $x, y \in E$. Montrer que :

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$
 - Qu'en déduit-on sur l'application $\|\cdot\|$?
- Soient $x, y \in E$. On considère :
 - $\exists \lambda \geq 0 : x = \lambda y$
 - $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.
 - Montrer que (i) $\implies$ (ii).
 - On se place dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ et on considère $x = (1, 0)$ et $y = (1, 1)$.
A-t-on (ii) $\implies$ (i) ?

QCOP EVN.2



Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- Rappeler la propriété de « séparation » de la norme $\|\cdot\|$.
- On définit $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$.
Soient $x, y \in E$. Montrer que :

$$d(x, y) = 0 \iff x = y.$$
- Soit $u \in L(E)$.
On définit $N : x \mapsto \|u(x)\|$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $N(\cdot)$ définisse une norme sur E .

QCOP EVN.3



Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- Définir la norme euclidienne associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$, que l'on notera $\|\cdot\|$.
- Vérifier l'axiome de séparation pour $\|\cdot\|$ en nommant l'argument utilisé.
- Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.
 - Vérifier l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$.
- Rappeler le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 - Soient $x, y \in E$. Montrer que :

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff [\exists \lambda \geq 0 : x = \lambda y].$$

Deux espaces vectoriels normés usuels

QCOP EVN.4



Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Rappeler les expressions de $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.
2. Vérifier que l'une des trois normes citées définit bien une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty.$$

QCOP EVN.5



Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$.

On note $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ les normes usuelles sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Rappeler les expressions de $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$.
2. Vérifier que l'une des trois normes citées définit bien une norme sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
3. a) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2 \leq (b-a) \|f\|_\infty.$$
 b) Les trois normes citées sont-elles équivalentes ?

Applications lipschitziennes

QCOP EVN.6



Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.
 Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Donner la définition de « $f : E \rightarrow F$ est lipschitzienne ».
2. Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in E$.
 - a) Donner la définition de « $(x_n)_n$ converge vers ℓ dans $(E, \|\cdot\|_E)$ ».
 - b) On suppose que $f : E \rightarrow F$ est lipschitzienne. Montrer que :

$$x_n \rightarrow \ell \implies f(x_n) \rightarrow f(\ell).$$
3. a) On suppose que f est linéaire. Montrer que :

$$f \text{ est lipschitzienne} \iff \left[\exists K \geq 0 : \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E \right].$$
 b) Cette équivalence reste-t-elle vraie si f n'est plus supposée linéaire ?