

ALIN. Compléments d'algèbre linéaire

QCOP ALIN.1

3. Résultat. La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

QCOP ALIN.4

2. a) ♦ Méthode rapide : les endomorphismes u et $u^2 + \text{Id}_E$ commutent donc $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}_E)$ est stable par u .
 ♦ Autre méthode : montrer que, pour $x \in F$, $u(x)$ est un élément de F en calculant $(u^2 + \text{Id}_E)(u(x))$.
 b) Utiliser que, pour tout $x \in F$, $u^2(x) + x = 0_E$.
 c) On trouve $\det(u_F^2) = (-1)^{\dim(F)}$. Utiliser que $\det(g^2) \geq 0$ (on est dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel).

QCOP ALIN.5

3. Résultat. $\text{Card}(\text{Sp}(u)) \leq \dim(E)$.
 On utilise que la taille d'une famille libre en dimension finie est majorée par la dimension de l'espace.

QCOP ALIN.6

1. Montrer (i) $\iff$ (ii) et (ii) $\iff$ (iii) en utilisant l'hypothèse de dimension.
 2. ♦ L'application u est injective car $\text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}\}$: la caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par le noyau est valable en dimension infinie aussi, comme (i) $\iff$ (ii).
 ♦ L'application u n'est pas surjective. N'importe quelle suite de premier terme non nul n'est pas dans l'image : $\text{Im}(u) \neq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
 Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de u mais u n'est pas un isomorphisme. La caractérisation vue précédemment fonctionne en dimension finie et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.
 Ce contre-exemple est le début de la théorie spectrale, étudiée en Master.

QCOP ALIN.7

1. Écrire la relation « $u(x) = \lambda x$ » et se rappeler que le conjugué d'un réel est un réel.
 2. Résultat. $E_{e^{i\theta}}(R_{\theta}) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $E_{e^{-i\theta}}(R_{\theta}) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.