

Compléments d'algèbre linéaire

Dans toute la fiche, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sous-espaces stables

QCOP ALIN.1



Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in L(E)$.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Donner la définition de « F est stable par u ».
2. Soit $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$. Montrer que

$$\text{Vect}\{x_0\} \text{ est stable par } u \iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{K} : u(x_0) = \lambda_0 x_0.$$
3. Soit $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la droite $\text{Vect}\{e_i\}$ est stable par u .
 Quelle est la forme de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$?

QCOP ALIN.2



Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $u \in L(E)$.

1. Rappeler la définition des sous-espaces $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
2. Soit $v \in L(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$.
 - a) Montrer que $\text{Ker}(u)$ est stable par v .
 - b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que le sous-espace $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par v .
 - c) Montrer que $\text{Im}(u)$ est stable par v .

QCOP ALIN.3



Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Quelle est la taille maximale d'une famille libre de E ?
2. Soit $u \in L(E)$. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$.
 - a) Justifier qu'il existe $p_x \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(x, u(x), \dots, u^{p_x-1}(x)) \text{ est libre} \quad \text{et} \quad (x, u(x), \dots, u^{p_x-1}(x), u^{p_x}(x)) \text{ est liée.}$$

On fixe un tel entier p_x .
 - b) En déduire que l'espace $\text{Vect}\{x, u(x), \dots, u^{p_x-1}(x)\}$ est stable par u .

QCOP ALIN.4 ★



Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$.

1. Soit F un sous-espace stable par u . Qu'appelle-t-on « l'endomorphisme induit par u sur F » ?
2.
 - a) Montrer que l'espace $F := \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_E)$ est stable par u .
 - b) En notant u_F l'endomorphisme induit par u sur F , montrer que $u_F^2 = -\text{Id}_F$.
 - c) Calculer $\det(u_F^2)$ et en déduire que F est de dimension paire.

Éléments propres, spectre

QCOP ALIN.5



Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $u \in L(E)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Donner la définition de « λ est une valeur propre de u ».
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $v_1, \dots, v_p \in E$ des vecteurs propres associés à p valeurs propres distinctes de u . Montrer que $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille libre de E .
On pourra raisonner par récurrence sur la taille de la famille.
3. On suppose que E est de dimension finie.
Majorer le cardinal du spectre de u .

QCOP ALIN.6



Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $u \in L(E)$.

1. On suppose E de dimension finie. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) λ est valeur propre de u ;
- (ii) $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif ;
- (iii) $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas surjectif ;
- (iv) $\det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$.

2. On se place dans $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et on considère

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (0, u_0, u_1, u_2, \dots) \end{cases}.$$

Montrer que u et $\lambda = 0$ ne vérifient pas (ii) mais vérifient (iii).

QCOP ALIN.7



Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit $u \in L(E)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de u .
 - a) Montrer que $\bar{\lambda}$ est valeur propre de u .
 - b) Comment déterminer les vecteurs propres associés à $\bar{\lambda}$?
2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$. On définit $R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
On admet que le complexe $e^{i\theta}$ est valeur propre de R_θ .
 - a) Déterminer l'espace propre $E_{e^{i\theta}}(R_\theta)$.
 - b) Déterminer la deuxième valeur propre de R_θ et son espace propre.