

Colle 2 • INDICATIONS

Fonctions, Suites, Séries

Exercice 2.1

Soit $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n} \cos(u_{n-1}). \end{cases}$$

Montrer que $\sum_n u_n$ converge.

indication

Montrer que $u_n \rightarrow 0$, puis montrer que $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 2.2

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la série

$$\sum_{n \geq 1} (\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2))$$

converge.

2. Calculer dans ce cas sa somme.

indication

1. Utiliser les propriétés du logarithme pour établir l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) = \alpha \ln(n) + \frac{\beta}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Procéder par télescopage ou changement d'indice.

résultat

1. $\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) = (1+a+b) \ln(n) + \frac{a+2b}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où $a = -2$ et $b = 1$.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)) = -\ln(2)$.

Exercice 2.3

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \arctan(nx), \end{cases}$$

sur les intervalles :

$$[0, 1], \quad]0, 1] \quad \text{et} \quad [a, 1] \quad \text{avec} \quad a > 0.$$

résultat

La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers :

$$f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases} \end{cases}$$

Il y a convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$ mais pas sur $[0, 1]$ ni $]0, 1]$.

Exercice 2.4

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que f'' est bornée.

Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g_n : x \longmapsto n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$$

converge uniformément vers f' sur $\mathbb{R}$.

indication

Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange sur les intervalles $\left[x, x + \frac{1}{n}\right]$.

Exercice 2.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soient $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ tels que :

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

1. Justifier qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_k) = P_n(x_k).$$

2. Soit $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$. Montrer que :

$$\exists \xi_x \in]\min(x, x_0), \max(x, x_n)[: \quad f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

1. ♦ Introduire l'application linéaire

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{array}$$

- ♦ Comparer les dimensions de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée.
- ♦ Étudier le noyau de cette application à l'aide du nombre de racines d'un polynôme non nul de degré au plus n .

2. ♦ Introduire l'application

$$g : \begin{array}{lcl} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) - P_n(t) - \lambda \prod_{k=0}^n (t - x_k) \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est choisi de sorte que $g(x) = 0$ (justifier que c'est possible, sachant que x n'est pas l'un des x_k).

- ♦ Vérifier que g s'annule en $n + 2$ points deux à deux distincts de $] \min(x, x_0), \max(x, x_n) [$.
- ♦ Appliquer le théorème de Rolle successivement à $g, g', \dots, g^{(n)}$ pour obtenir un point ξ_x tel que $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$.
- ♦ Conclure en dérivant $(n + 1)$ fois l'expression de g : que valent $P_n^{(n+1)}$ (degré de P_n) et la dérivée $(n + 1)$ -ième de $\prod_{k=0}^n (X - x_k)$?

Exercice 2.6 Méthode de Newton

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a)f(b) < 0$ et f' et f'' sont à valeurs strictement positives sur $[a, b]$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[a, b]$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$x_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

est bien définie et converge vers α .

3. (a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $\xi_n \in [x_n, \alpha]$ tel que :

$$f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (\alpha - x_n)^2.$$

- (b) On note $M_2 := \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)|$ et $m_1 := \inf_{t \in [a, b]} |f'(t)|$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - \alpha|^2.$$

- (c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|x_n - \alpha|$.

indication

1. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, puis la stricte monotonie de f .
2. Étudier le signe de $f(x_n)$ et utiliser la convexité de f (via $f'' > 0$) pour montrer que $(x_n)_n$ est décroissante et minorée par α .
3. (a) ♦ Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 pour f entre x_n et α .
♦ Remarquer que le terme $\alpha - t$ garde un signe constant lorsque $t \in [x_n, \alpha]$.
♦ En notant m_2 et M_2 des minorant et majorant de f'' sur $[a, b]$, encadrer l'intégrale $\int_{x_n}^{\alpha} (\alpha - t) f''(t) dt$ à l'aide de $\int_{x_n}^{\alpha} (\alpha - t) dt$.
♦ Conclure, grâce au théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f'' , que :
$$\exists \xi_n \in [x_n, \alpha] : \int_{x_n}^{\alpha} (\alpha - t) f''(t) dt = f''(\xi_n) \int_{x_n}^{\alpha} (\alpha - t) dt.$$

(b) Utiliser l'égalité de la sous-question précédente pour majorer $|x_{n+1} - \alpha|$ en fonction de $|x_n - \alpha|^2$.
(c) Procéder par récurrence, en majorant $|x_0 - \alpha|$ par $b - a$.

résultat

2. La suite $(x_n)_n$ est bien définie, décroissante, minorée par α , et converge vers α .
3. (c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leq (b - a) \left(\frac{(b - a)M_2}{2m_1} \right)^{2^n - 1}.$