

Colle 2

Fonctions, Suites, Séries

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous avez une semaine pour faire ce travail et le déposer dans mon casier ou en ligne.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Séries numériques

Exercice 2.1

Soit $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n} \cos(u_{n-1}). \end{cases}$$

Montrer que $\sum_n u_n$ converge.

Exercice 2.2

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum_{n \geq 1} (\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2))$ converge.
2. Calculer dans ce cas sa somme.

Suites de fonctions

Exercice 2.3

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \arctan(nx), \end{cases}$$

sur les intervalles :

$$[0, 1], \quad]0, 1] \quad \text{et} \quad [a, 1] \quad \text{avec} \quad a > 0.$$

Exercice 2.4

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que f'' est bornée.

Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g_n : x \longmapsto n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$$

converge uniformément vers f' sur $\mathbb{R}$.

Fonctions

Exercice 2.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soient $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ tels que :

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

1. Justifier qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_k) = P_n(x_k).$$

2. Soit $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$. Montrer que :

$$\exists \xi_x \in]\min(x, x_0), \max(x, x_n)[: \quad f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

Exercice 2.6 Méthode de Newton

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a)f(b) < 0$ et f' et f'' sont à valeurs strictement positives sur $[a, b]$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[a, b]$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$x_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

est bien définie et converge vers α .

3. (a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $\xi_n \in [x_n, \alpha]$ tel que :

$$f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (\alpha - x_n)^2.$$

(b) On note $M_2 := \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)|$ et $m_1 := \inf_{t \in [a, b]} |f'(t)|$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - \alpha|^2.$$

(c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|x_n - \alpha|$.