

Colle 1 • INDICATIONS

Fonctions, Suites, Séries

Exercice 1.1

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

indication

Montrer que $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

résultat

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ converge.

Exercice 1.2

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la série

$$\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2})$$

converge.

2. Calculer dans ce cas sa somme.

indication

1. Utiliser un développement asymptotique de $\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{n+2}$ pour établir l'existence de deux réels α et β tels que :

$$\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} = \alpha\sqrt{n} + \frac{\beta}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

2. Procéder par télescopage ou changement d'indice.

résultat

$$1. \quad \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} = (1+a+b)\sqrt{n} + \frac{a+2b}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

On peut prendre $a = -2$ et $b = 1$.

$$2. \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}) = 1 - \sqrt{2}.$$

Exercice 1.3

On définit la suite $(u_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que $v_n \rightarrow 1$.

(b) Montrer que :

$$\frac{v_0 + \cdots + v_{n-1}}{n} \rightarrow 1.$$

(c) En déduire un équivalent de u_n .

indication

1. Montrer que la suite est correctement définie et utiliser le théorème de la limite monotone.

2. (a) Utiliser que $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

(b) Utiliser le théorème de Cesàro.

(c) $v_0 + \cdots + v_{n-1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}$.

résultat

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

Exercice 1.4

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n := \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

1. Montrer que $u_n \rightarrow 1$.

2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$

3. En déduire que :

$$u_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

indication

1. Majorer $|u_n - 1|$ à l'aide de l'inégalité triangulaire intégrale.

2. Procéder par intégration par parties.

3. Montrer d'abord que $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \rightarrow 0$ (à l'aide de $\ln(1+t) \leq t$) et remarquer que :

$$u_n = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx.$$

Exercice 1.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soient $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ tels que :

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

1. Justifier qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_k) = P_n(x_k).$$

2. Soit $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$. Montrer que :

$$\exists \xi_x \in]\min(x, x_0), \max(x, x_n)[: \quad f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

indication

1. ♦ Introduire l'application linéaire

$$\begin{array}{l|l} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{array}$$

♦ Comparer les dimensions de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée.

♦ Étudier le noyau de cette application à l'aide du nombre de racines d'un polynôme non nul de degré au plus n .

2. ♦ Introduire l'application

$$g : \begin{array}{l|l} [a, b] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto f(t) - P_n(t) - \lambda \prod_{k=0}^n (t - x_k) \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est choisi de sorte que $g(x) = 0$ (justifier que c'est possible, sachant que x n'est pas l'un des x_k).

♦ Vérifier que g s'annule en $n+2$ points deux à deux distincts de $] \min(x, x_0), \max(x, x_n) [$.

♦ Appliquer le théorème de Rolle successivement à $g, g', \dots, g^{(n)}$ pour obtenir un point ξ_x tel que $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$.

♦ Conclure en dérivant $(n+1)$ fois l'expression de g : que valent $P_n^{(n+1)}$ (degré de P_n) et la dérivée $(n+1)$ -ième de $\prod_{k=0}^n (X - x_k)$?

Exercice 1.6

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On note, pour $x \in [a, b]$:

$$T_f(x) := \frac{f(a) + f(x)}{2} (x - a) \quad \text{et} \quad E_f(x) := \int_a^x f(t) dt - T_f(x).$$

Enfin, on note $E_f := E_f(b)$ l'erreur d'approximation de $\int_a^b f(t) dt$ par l'aire du trapèze.

1. (a) Montrer que :

$$\forall x \in [a, b], \quad |E_f''(x)| \leq \frac{x-a}{2} \|f''\|_\infty.$$

(b) En déduire une majoration de $|E_f'(x)|$ pour $x \in [a, b]$.

2. Montrer que :

$$|E_f| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty.$$

indication

1. (a) Calculer explicitement $E_f''(x)$ à partir de $T_f(x)$.

(b) Écrire $E_f'(x) = \int_a^x E_f''(t) dt$, car $E_f'(a) = 0$.

2. Procéder de même à partir de $E_f(a) = 0$ et $E_f(x) = \int_a^x E_f'(t) dt$.

résultat

1. (b) $|E_f'(x)| \leq \frac{(x-a)^2}{4} \|f''\|_\infty.$