

Colle 1

Fonctions, Suites, Séries

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous avez une semaine pour faire ce travail et le déposer dans mon casier ou en ligne.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Séries numériques

Exercice 1.1

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Exercice 1.2

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2})$ converge.
2. Calculer dans ce cas sa somme.

Suites numériques

Exercice 1.3

On définit la suite $(u_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
 - (a) Montrer que $v_n \rightarrow 1$.
 - (b) Montrer que :
$$\frac{v_0 + \dots + v_{n-1}}{n} \rightarrow 1.$$
 - (c) En déduire un équivalent de u_n .

Exercice 1.4

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n := \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

1. Montrer que $u_n \rightarrow 1$.
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$
3. En déduire que :
$$u_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Fonctions

Exercice 1.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soient $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ tels que :

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

1. Justifier qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_k) = P_n(x_k).$$

2. Soit $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$. Montrer que :

$$\exists \xi_x \in]\min(x, x_0), \max(x, x_n)[: \quad f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

Exercice 1.6

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On note, pour $x \in [a, b]$:

$$T_f(x) := \frac{f(a) + f(x)}{2} (x - a) \quad \text{et} \quad E_f(x) := \int_a^x f(t) dt - T_f(x).$$

Enfin, on note $E_f := E_f(b)$ l'erreur d'approximation de $\int_a^b f(t) dt$ par l'aire du trapèze.

1. (a) Montrer que :

$$\forall x \in [a, b], \quad |E_f''(x)| \leq \frac{x-a}{2} \|f''\|_\infty.$$

(b) En déduire une majoration de $|E_f'(x)|$ pour $x \in [a, b]$.

2. Montrer que :

$$|E_f| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty.$$