

Colle 1 • INDICATIONS

Raisonnements

Exercice 1.1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ est correctement définie.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n et u_0 .

indication

1. Reasonner par récurrence pour montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n + 1 > 0$$

2. Conjecturer en calculant $u_1, u_2, \dots$, puis raisonner par récurrence pour montrer la conjecture.

résultat

$$2. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{u_0}{n u_0 + 1}.$$

Exercice 1.2

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$\sqrt{2-x} = x.$$

indication

Élever au carré, résoudre l'équation polynomiale de degré 2 déterminée et déterminer la solution du problème par des considérations de signe.

résultat

$$x = 1.$$

Exercice 1.3

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

indication

- ◆ Raisonner par analyse-synthèse.
- ◆ Évaluer en $(x, y) = (0, 0)$ pour obtenir les valeurs possibles de $f(0)$.
- ◆ Déterminer la seule valeur possible de $f(0)$ puis évaluer de nouveau l'équation en $y = 0$.

résultat

$$f : x \mapsto 1 + x.$$

Exercice 1.4

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$ lorsque :

$$\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Déterminer l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 4 paires.

indication

Raisonner par analyse-synthèse. En se donnant f une fonction polynomiale de degré 3, déterminer des conditions sur les coefficients $a_0, \dots, a_4$ pour avoir

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(-x) = 0.$$

On pourra en particulier évaluer cette relation en certains points.

résultat

Les fonctions répondant au problème sont dans l'ensemble $\left\{ x \mapsto a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 ; a_0, a_2, a_4 \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 1.5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

La fonction f est dite paire lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

Montrer que f est paire si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x^2).$$

indication

- $\Leftarrow$ Se vérifie par calcul.
- $\Rightarrow$ Raisonner par analyse synthèse. Évaluer en $x = \sqrt{t}$ pour trouver g . La parité de f permet de vérifier que g répond bien au problème.

Exercice 1.6

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$ tous distincts tels que :

$$n = 2^{k_1} + \dots + 2^{k_p}.$$

indication

Procéder par récurrence forte. Dans l'hérédité, on pourra supposer la propriété vraie pour tous les entiers strictement inférieurs à n pour montrer la propriété pour n , en distinguant les cas où n est pair et n est impair. Dans le cas où n est pair, on utilise la décomposition de $\frac{n}{2}$ et dans le cas où n est impair, $n - 1$ est pair.

Exercice 1.7

Soient $u, v > 0$.

Déterminer tous les couples $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tels que :

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{x}{y} = v. \end{cases}$$

indication

- ◆ Raisonner par analyse-synthèse.
- ◆ Faire le produit des deux équations pour en déduire x^2 puis x (en pensant au signe).
- ◆ En déduire les y possibles.

résultat

Les couples solutions du système sont les éléments de :

$$\left\{ \left(\sqrt{uv}, \frac{\sqrt{uv}}{v} \right), \left(-\sqrt{uv}, -\frac{\sqrt{uv}}{v} \right) \right\}.$$

Exercice 1.8

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) := ax$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) + f(x) = 2x.$$

1. Déterminer les valeurs possibles de a .
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = -2x_2 \quad \text{et} \quad x = x_1 + x_2.$$

indication

1. Évaluer la relation supposée sur f en $x = 1$ et résoudre l'équation de degré 2.
2. Raisonner par analyse-synthèse.

résultat

1. $a = 1$ ou $a = -2$.
2. $x_1 = \frac{2x + f(x)}{3}$ et $x_2 = \frac{x - f(x)}{3}$.

Exercice 1.9

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a + b \notin \mathbb{Q}$.

Les nombres a et b peuvent-ils être rationnels ?

indication

Raisonner par l'absurde et écrire les définitions pour calculer $a + b$.

Exercice 1.10

Existe-t-il $x, y \notin \mathbb{Q}$ tels que $x^y \in \mathbb{Q}$?

indication

On pourra exploiter l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et/ou de $\frac{\ln(p)}{\ln(q)}$ avec p et q deux nombres premiers distincts.

Exercice 1.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_k|, |b_k| \leq 1.$$

Montrer que :

$$\left| \prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|.$$

indication

Raisonner par récurrence. Dans la phase d'hérédité, commencer par écrire :

$$\left| \prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k \right| = \left| \prod_{k=1}^{n+1} a_k - a_{n+1} \prod_{k=1}^n b_k + a_{n+1} \prod_{k=1}^n b_k - \prod_{k=1}^{n+1} b_k \right|$$