

Colle 1

Raisonnements

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous avez une semaine pour faire ce travail et le déposer dans la boîte en B013 ou en ligne.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 1.1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ est correctement définie.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n et u_0 .

Exercice 1.2

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$\sqrt{2-x} = x.$$

Exercice 1.3

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 1.4

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *polynomiale de degré* $n \in \mathbb{N}$ lorsque :

$$\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Déterminer l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 4 paires.

Exercice 1.5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

La fonction f est dite *paire* lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

Montrer que f est paire si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x^2).$$

Exercice 1.6

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$ tous distincts tels que :

$$n = 2^{k_1} + \dots + 2^{k_p}.$$

Exercice 1.7

Soient $u, v > 0$.

Déterminer tous les couples $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tels que :

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{x}{y} = v. \end{cases}$$

Exercice 1.8

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) := ax$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) + f(x) = 2x.$$

1. Déterminer les valeurs possibles de a .
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = -2x_2 \quad \text{et} \quad x = x_1 + x_2.$$

Exercice 1.9

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a + b \notin \mathbb{Q}$.

Les nombres a et b peuvent-ils être rationnels ?

Exercice 1.10

Existe-t-il $x, y \notin \mathbb{Q}$ tels que $x^y \in \mathbb{Q}$?

Exercice 1.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_k|, |b_k| \leq 1.$$

Montrer que :

$$\left| \prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|.$$