

Colle 1 • CORRECTIONS

Raisonnements

Exercice 1.5

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

La fonction f est dite paire lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

Montrer que f est paire si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x^2).$$

correction

Sens $\Rightarrow$.

► Fixons $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x^2) = f(x).$$

► Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(-x) = g((-x)^2) = g(x^2) = f(x).$$

► D'où f est paire.

Sens $\Leftarrow$.

On suppose que f est paire. On raisonne par analyse-synthèse.

ANALYSE.

► Supposons qu'il existe $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x^2) = f(x). \quad (\star)$$

► Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On évalue $(\star)$ en $x = \sqrt{t}$: on a

$$g(t) = g((\sqrt{t})^2) = f(\sqrt{t}).$$

► Ainsi, si une telle fonction g existe, elle est de la forme

$$g : t \longmapsto f(\sqrt{t}).$$

► De plus, toujours si existence, l'expression déterminée garantit l'unicité de g .

SYNTHÈSE.

► Notons $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(\sqrt{t}) \end{cases}$. Montrons que g répond au problème.

► Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$g(x^2) = f(\sqrt{x^2}) = \begin{cases} f(-x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = f(x),$$

car f est paire. Donc g ainsi définie répond au problème.

Exercice 1.9

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a + b \notin \mathbb{Q}$.

Les nombres a et b peuvent-ils être rationnels ?

correction

- Supposons que $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$.
- Fixons $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ et $q_1, q_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$a = \frac{p_1}{q_1} \quad \text{et} \quad b = \frac{p_2}{q_2}.$$

- Alors on a

$$a + b = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}.$$

- Ainsi, $a + b \in \mathbb{Q}$. En effet,
 - ▷ par somme de produits d'éléments de $\mathbb{Z}$, on a $p_1 q_2 + p_2 q_1 \in \mathbb{Z}$;
 - ▷ par somme de produits d'éléments de $\mathbb{N}^*$, on a $q_1 q_2 \in \mathbb{N}^*$.
- On a montré que

$$\left. \begin{array}{l} a \in \mathbb{Q} \\ b \in \mathbb{Q} \end{array} \right\} \implies a + b \in \mathbb{Q}.$$

- En contraposant, on a ainsi montré que

$$a + b \notin \mathbb{Q} \implies a \notin \mathbb{Q} \text{ ou } b \notin \mathbb{Q}.$$

Exercice 1.10

Existe-t-il $x, y \notin \mathbb{Q}$ tels que $x^y \in \mathbb{Q}$?

correction

MÉTHODE 1

Il est acquis que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Intéressons-nous à $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

CAS 1. On suppose que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. On pose

$$x := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad y := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

On a alors $x^y \in \mathbb{Q}$ par hypothèse.

CAS 2. On suppose que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$. On pose

$$x := \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad y := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

On a alors $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.

CONCLUSION.

Il existe deux irrationnels x et y tels que $x^y \in \mathbb{Q}$.

MÉTHODE 2

- On démontre tout d'abord que $\frac{\ln(p)}{\ln(q)} \notin \mathbb{Q}$ pour p et q deux entiers premiers distincts.

▷ On raisonne par l'absurde. Fixons $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\ln(p)}{\ln(q)} = \frac{a}{b}$.

▷ On a alors $b \ln(p) = a \ln(q)$, d'où, $\ln(p^b) = \ln(q^a)$, donc, par passage à l'exponentielle,

$$p^b = q^a.$$

▷ Comme $b \neq 0$, c'est impossible par primalité de p et q .

► On s'intéresse au nombre $\sqrt{2^{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}}}$.

CAS 1. Ou bien $\sqrt{2^{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}}} \in \mathbb{Q}$. On pose

$$x := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad y := \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \notin \mathbb{Q}.$$

On a alors $x^y \in \mathbb{Q}$ par hypothèse.

CAS 2. Ou bien $\sqrt{2^{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}}} \notin \mathbb{Q}$. On pose

$$x := \sqrt{2^{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}}} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad y := 2^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}} \notin \mathbb{Q}.$$

On a alors $x^y = 2 \in \mathbb{Q}$.

► Il existe deux irrationnels x et y tels que $x^y \in \mathbb{Q}$.