

Colle 3 • INDICATIONS

Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 3.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$
- (ii) $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$
- (iii) $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

indication

♦ (i) $\implies$ (ii) et (ii) $\implies$ (iii) : montrer une inclusion et l'égalité des dimensions par le théorème du rang.

♦ (iii) $\implies$ (i) : pour $x \in E$, $u(x) \in \text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$ donc $u(x) = u^2(z)$, et écrire :

$$x = x - u(z) + u(z),$$

pour montrer que $E = \text{Ker}(u) + \text{Im}(u)$.

Exercice 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & (0) \\ 2 & 3 & 1 & & \\ & 2 & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

indication

Reconnaître, à l'aide de développements suivant une ligne ou une colonne, une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis en déterminer le terme général.

résultat

$$\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n.$$

$$\Delta_n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 3.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad 0 \leq m_{i,j} \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1.$$

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

1. Montrer que $|\det(M)| \leq 1$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, M^k est stochastique.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k := \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} M^\ell$ est stochastique.

indication

1. Raisonner par récurrence sur n . Dans l'hérédité, développer $\det(M)$ par rapport à une ligne, et majorer chaque cofacteur par 1 à l'aide de l'hypothèse de récurrence.
2. Raisonner par récurrence sur k . Dans l'hérédité, intervertir les sommes pour utiliser que M et M^k sont stochastiques.
3. Fixer $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et calculer $\sum_{j=1}^n (R_k)_{i,j}$. Intervertir les sommes, et utiliser 2..

résultat

1. $|\det(M)| \leq 1$.
2. M^k est stochastique pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. R_k est stochastique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.4

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in L(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = E$.
2. On suppose que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u .

indication

1. ♦ Pour $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$, écrire $x = u(y)$. Appliquer la relation $u^3 + u^2 + u = 0$ à y pour montrer que $x = 0$.
♦ Conclure à l'aide du théorème du rang.
2. Montrer que toute valeur propre réelle λ de u vérifie $\lambda(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$.

2. $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \{0\}$.

Exercice 3.5

Soit $n \geq 2$. On se place dans $E := \mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P - P'.$$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de E .
2. Montrer que f est bijectif.
3. Soit $Q \in E$. Déterminer un polynôme $P \in E$ tel que $f(P) = Q$.
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

indication

On note A la matrice de f dans la base canonique de E .

1. Calculer $f(X^k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
2. La matrice A est triangulaire : quels sont ses coefficients diagonaux ?
3. ♦ Que vaut $P^{(n+1)}$ pour $P \in E$?
♦ En dérivant successivement la relation $P - P' = Q$, exprimer P en fonction de Q et de ses dérivées.
4. ♦ À l'aide de la matrice A de la question 1. et du déterminant d'une matrice triangulaire, déterminer $\text{Sp}(f)$.
♦ En utilisant le critère « f diagonalisable $\iff E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_{\lambda}(f)$ », montrer que si f est diagonalisable, alors $f = \text{Id}$.
♦ Conclure en exhibant un polynôme sur lequel f et Id diffèrent.

Exercice 3.6

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } u \circ v \iff \lambda \text{ est valeur propre de } v \circ u.$$

2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$, les endomorphismes u et v définis par :

$$u : P \longmapsto \int_1^X P \quad \text{et} \quad v : P \longmapsto P'.$$

Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

Remarque. La notation $\int_1^X P$ désigne le polynôme associé à la fonction polynomiale $x \longmapsto \int_1^x P$.

3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la question 1. reste vrai pour $\lambda = 0$.

Indication. On pourra utiliser le déterminant.

indication

1. ♦ Soit x un vecteur propre de $u \circ v$ associé à λ . Poser $y = v(x)$.
♦ Vérifier que $y \neq 0$ (car $\lambda \neq 0$), puis calculer $v \circ u(y)$.
2. ♦ Pour $\text{Ker}(v \circ u)$, calculer directement $(v \circ u)(P)$.
♦ Pour $\text{Ker}(u \circ v)$, calculer $(u \circ v)(P)$ à l'aide du théorème fondamental de l'analyse.
3. Utiliser le fait que $\det(u \circ v - \lambda \text{Id}) = \det(v \circ u - \lambda \text{Id})$ pour tout λ , y compris $\lambda = 0$.

Exercice 3.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

On se place dans $E_n := \mathbb{R}_{2n}[X]$ et on considère l'application u définie sur E_n par :

$$\forall P \in E_n, \quad u(P) = (X^2 - 1)P' - 2(nX + a)P.$$

1. Déterminer les éléments propres de u .
2. L'application u est-elle diagonalisable ?
3. En déduire que, pour tout $P \in E_n$, il existe une unique famille $(\alpha_k)_{-n \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ telle que :

$$P = \sum_{k=-n}^n \alpha_k (X+1)^{n-k} (X-1)^{n+k}.$$

indication

1. ♦ Si $u(P) = \lambda P$ avec P non nul, écrire l'égalité sous la forme

$$\frac{P'}{P} = \frac{2nX + 2a + \lambda}{(X-1)(X+1)},$$
 en supposant P scindé (quitte à se placer dans $\mathbb{C}[X]$).
♦ Décomposer le membre de droite en éléments simples, et en déduire que les seules racines possibles de P sont 1 et -1 .
♦ Exprimer les multiplicités de ces racines en fonction de λ , et conclure sur la forme de P .
2. ♦ Compter le nombre de valeurs propres distinctes obtenues à la question précédente.
♦ Comparer ce nombre à $\dim(E_n)$.
3. Utiliser le fait que la famille de vecteurs propres obtenue à la question 1 est une base de E_n .

résultat

1. $\text{Sp}(u) = \{2(k - a) ; k \in \llbracket -n, n \rrbracket\}$, de vecteurs propres associés

$$Q_k = (X+1)^{n-k} (X-1)^{n+k}.$$
2. u est diagonalisable ($2n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $2n+1$).