

Colle 3

Compléments d'algèbre linéaire

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous avez une semaine pour faire ce travail et le déposer dans mon casier ou en ligne.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Révisions d'algèbre linéaire, Déterminants

Exercice 3.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u \in L(E)$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$
- (ii) $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$
- (iii) $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

Exercice 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & (0) \\ 2 & 3 & 1 & & \\ & 2 & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad 0 \leq m_{i,j} \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1.$$

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

1. Montrer que $|\det(M)| \leq 1$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, M^k est stochastique.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k := \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} M^\ell$ est stochastique.

Éléments propres, Diagonalisabilité

Exercice 3.4

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in L(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = E$.
2. On suppose que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u .

Exercice 3.5

Soit $n \geq 2$. On se place dans $E := \mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P - P'.$$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de E .
2. Montrer que f est bijectif.
3. Soit $Q \in E$. Déterminer un polynôme $P \in E$ tel que $f(P) = Q$.
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 3.6

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } u \circ v \iff \lambda \text{ est valeur propre de } v \circ u.$$

2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$, les endomorphismes u et v définis par :

$$u : P \longmapsto \int_1^X P \quad \text{et} \quad v : P \longmapsto P'.$$

Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

Remarque. La notation $\int_1^X P$ désigne le polynôme associé à la fonction polynomiale $x \longmapsto \int_1^x P$.

3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la question 1. reste vrai pour $\lambda = 0$.

Indication. On pourra utiliser le déterminant.

Exercice 3.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

On se place dans $E_n := \mathbb{R}_{2n}[X]$ et on considère l'application u définie sur E_n par :

$$\forall P \in E_n, \quad u(P) = (X^2 - 1)P' - 2(nX + a)P.$$

1. Déterminer les éléments propres de u .
2. L'application u est-elle diagonalisable ?
3. En déduire que, pour tout $P \in E_n$, il existe une unique famille $(\alpha_k)_{-n \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ telle que :

$$P = \sum_{k=-n}^n \alpha_k (X+1)^{n-k} (X-1)^{n+k}.$$