

Colle 2 • INDICATIONS

Séries numériques, Algèbre linéaire

Exercice 2.1

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la série

$$\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2})$$

converge.

2. Calculer dans ce cas sa somme.

indication

1. Utiliser un développement asymptotique de $\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{n+2}$ pour établir l'existence de deux réels α et β tels que :

$$\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} = \alpha\sqrt{n} + \frac{\beta}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

2. Procéder par télescopage ou changement d'indice.

résultat

1. $\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} = (1+a+b)\sqrt{n} + \frac{a+2b}{2\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$

On peut prendre $a = -2$ et $b = 1$.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}) = 1 - \sqrt{2}.$

Exercice 2.2

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$

indication

Montrer que $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$

résultat

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ converge.

Exercice 2.3

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{e^{-u_n}}{n}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

2. Déterminer un équivalent de u_n .

Indication. On pourra commencer par déterminer un équivalent de $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$.

indication

1. ♦ Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

♦ Raisonner par l'absurde en supposant que $u_n \rightarrow \ell$. Puisque cela donne

$$u_{n+1} - u_n \sim \frac{e^{-\ell}}{n},$$

montrer qu'il y a une absurdité en utilisant la divergence de la série harmonique.

2. ♦ Montrer que $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \sim \frac{1}{n}$.

♦ En sommant les équivalents (attention aux hypothèses) et, grâce à l'équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, montrer que :

$$e^{u_n} \sim \ln(n).$$

♦ Conclure en passant au logarithme dans le développement limité.

résultat

2. $u_n \sim \ln(\ln(n))$.

Exercice 2.4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ : \quad H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

On fixe un tel γ .

2. À l'aide de la suite $(H_n - \ln(n) - \gamma)_n$, montrer que :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

indication

1. En posant $u_n := H_n - \ln(n)$, montrer que $(u_n)_n$ est bornée et monotone, en exploitant une comparaison série intégrale.
2. On définit $v_n := H_n - \ln(n) - \gamma$.
 - ♦ Déterminer un équivalent de $v_n - v_{n-1}$ en faisant un développement limité.
 - ♦ Utiliser le théorème de sommation des restes pour montrer que

$$v_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$

puis retrouver un équivalent de ce reste par comparaison série-intégrale.

Exercice 2.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in L(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \exists n_x \in \mathbb{N} : \quad f^{n_x}(x) = 0_E.$$

1. Montrer que f est nilpotent.
2. Le résultat subsiste-t-il si E n'est plus supposé de dimension finie ?

indication

1. Utiliser $n \max(n_{e_1}, \dots, n_{e_p})$, où $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E .
2. On peut, par exemple, se placer dans $E = \mathbb{R}[X]$ avec $f : P \mapsto P'$.

Exercice 2.6

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq \mu$.

Soient $x, y \in E \setminus \{0_E\}$ tels que :

$$f(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad f(y) = \mu y.$$

Montrer que (x, y) est libre.

2. Généraliser.

indication

1. On écrira deux relations pour montrer que l'un des scalaires est nul, puis l'autre.
2. Raisonner par récurrence.

Exercice 2.7

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in L(E)$ tel que :

$$u^n = 0_{L(E)} \quad \text{et} \quad u^{n-1} \neq 0_{L(E)}.$$

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u .

indication

1. Se donner un vecteur $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ et montrer que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E .
2. On note A la matrice précédente. Soit B telle que $AB = BA$. Exploiter l'égalité $AB = BA$ coefficient par coefficient pour montrer que le commutant de A est $\text{Vect}\{A^k\}_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$.

Exercice 2.8 Noyaux et images itérés, cœur et nilspace.

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in L(E)$.

1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^{k+1}) \subset \text{Im}(u^k).$$

2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$.

On notera p le plus petit entier k vérifiant cette propriété.

3. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Ker}(u^{p+k}) = \text{Ker}(u^p) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^{p+k}) = \text{Im}(u^p).$$

4. Montrer que $E = \text{Ker}(u^p) \oplus \text{Im}(u^p)$.

Les sous-espaces $\text{Im}(u^p)$ et $\text{Ker}(u^p)$ s'appellent respectivement « cœur » et « nilspace » de u .

indication

1. Essentiellement, $u^{k+1}(\dots) = u^k(u(\dots))$.
2. Raisonner avec la suite $(\dim(\text{Ker}(u^k)))_{k \in \mathbb{N}}$.
3. ♦ L'égalité des noyaux peut se démontrer par récurrence.
♦ L'égalité des images peut se démontrer à l'aide d'une inclusion et de l'égalité des dimensions, obtenue par le théorème du rang.
4. Utiliser les dimensions et montrer que l'intersection est nulle.

Exercice 2.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que :

A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$ $\iff$ A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$.