

Colle 2

Séries numériques, Algèbre linéaire

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous avez une semaine pour faire ce travail et le déposer dans mon casier ou en ligne.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Séries numériques

Exercice 2.1

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la série
$$\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2})$$
 converge.
2. Calculer dans ce cas sa somme.

Exercice 2.2

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Exercice 2.4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ : H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

On fixe un tel γ .

2. À l'aide de la suite $(H_n - \ln(n) - \gamma)_n$, montrer que :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2.3

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{e^{-u_n}}{n}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer un équivalent de u_n .

Indication. On pourra commencer par déterminer un équivalent de $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$.

Algèbre linéaire

Exercice 2.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in L(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \exists n_x \in \mathbb{N} : f^{n_x}(x) = 0_E.$$

1. Montrer que f est nilpotent.
2. Le résultat subsiste-t-il si E n'est plus supposé de dimension finie ?

Exercice 2.6

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq \mu$.
Soient $x, y \in E \setminus \{0_E\}$ tels que :
 $f(x) = \lambda x$ et $f(y) = \mu y$.
Montrer que (x, y) est libre.
2. Généraliser.

Exercice 2.7

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in L(E)$ tel que :

$$u^n = 0_{L(E)} \quad \text{et} \quad u^{n-1} \neq 0_{L(E)}.$$

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u .

Exercice 2.8 Noyaux et images itérés, cœur et nilspace.

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in L(E)$.

1. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^{k+1}) \subset \text{Im}(u^k).$$
2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$.
On notera p le plus petit entier k vérifiant cette propriété.
3. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Ker}(u^{p+k}) = \text{Ker}(u^p) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^{p+k}) = \text{Im}(u^p).$$
4. Montrer que $E = \text{Ker}(u^p) \oplus \text{Im}(u^p)$.

Les sous-espaces $\text{Im}(u^p)$ et $\text{Ker}(u^p)$ s'appellent respectivement « cœur » et « nilspace » de u .

Exercice 2.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que :

$$A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } M_n(\mathbb{R}) \iff A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } M_n(\mathbb{C}).$$