

Colle 1 • INDICATIONS

Séries numériques

Exercice 1.1

Soit $\alpha > 1$.

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

indication

Procéder par comparaison série intégrale avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.

résultat

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 1.2

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n^2}$.

indication

- ◆ Procéder par comparaison série intégrale pour montrer que $H_n \sim \ln(n)$.
- ◆ Procéder par comparaison série intégrale pour déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^2}$.
- ◆ Conclure par critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

résultat

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n^2}$ converge.

Exercice 1.3

Pour une fonction continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit :

$$c_k(g) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} g(x) dx.$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π -périodique.

1. Justifier que $(c_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k(f') = ik c_k(f)$.
3. Montrer que $\sum_{k \geq 0} c_k(f)$ converge absolument et que :

$$\forall M \in \mathbb{N}^*, \quad \exists C \in \mathbb{R}_+ : \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=N}^{+\infty} |c_k(f)| \leq \frac{C}{N^M}.$$

indication

1. Utiliser le théorème des bornes atteintes et l'inégalité triangulaire intégrale.
2. Procéder par intégration par parties.
3. Appliquer successivement la question précédente pour montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall M \in \mathbb{N}, \quad |c_k(f)| \leq \frac{\|f^{(M+1)}\|_\infty}{k^{M+1}}.$$

Par sommation des $\mathcal{O}(\cdot)$, on montre que :

$$\sum_{k=N}^{+\infty} |c_k(f)| = \mathcal{O}_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{1}{k^{M+1}} \right),$$

et on peut conclure à l'aide d'un équivalent des séries de Riemann, en ayant au préalable écrit que $\frac{1}{N^M} = \int_N^{+\infty} \frac{1}{t^{M+1}} dt$.

Exercice 1.4

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Montrer que $\sum_n u_n$ converge et calculer sa somme.

indication

- ◆ On peut utiliser le théorème des séries alternées pour établir la convergence.
- ◆ On peut ensuite calculer

$$S_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}},$$

et déterminer sa limite grâce au théorème des sommes de Riemann.

Exercice 1.5

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\sum_n \frac{1}{(pn)!}$ converge et calculer sa somme.

indication

- ♦ L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tz)^n}{n!} = e^{tz}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.
- ♦ Utiliser les racines p -ièmes de l'unité.

résultat

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(pn)!} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \exp(\omega^k) \text{ avec } \omega = e^{\frac{2i\pi}{p}}.$$

Exercice 1.6

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin(u_n). \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer un équivalent de u_n .

Indication. On pourra commencer par chercher $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_n$ converge.

indication

1. ♦ Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée.
 - ♦ Chercher la limite ℓ en remarquant que, sur $[0, 1]$, l'équation $\sin(\ell) = \ell$ n'admet qu'une seule solution par stricte concavité de $\sin(\cdot)$.
2. ♦ Puisque $u_n \rightarrow 0$, on peut développer $\sin(u_n)$ pour montrer que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = -\alpha \frac{u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha}).$$

- ♦ On peut alors prendre $\alpha = -2$ pour obtenir que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$.
- ♦ Le théorème de Césaro donne $\frac{1}{n} \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{3}$.

résultat

1. $u_n \rightarrow 0$.
2. $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Exercice 1.7

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{e^{-u_n}}{n}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

2. Déterminer un équivalent de u_n .

Indication. On pourra commencer par déterminer un équivalent de $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$.

indication

1. ♦ Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

♦ Raisonner par l'absurde en supposant que $u_n \rightarrow \ell$. Puisque cela donne

$$u_{n+1} - u_n \sim \frac{e^{-\ell}}{n},$$

montrer qu'il y a une absurdité en utilisant la divergence de la série harmonique.

2. ♦ Montrer que $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \sim \frac{1}{n}$.

♦ En sommant les équivalents (attention aux hypothèses) et, grâce à l'équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, montrer que :

$$e^{u_n} \sim \ln(n).$$

♦ Conclure en passant au logarithme dans le développement limité.

résultat

2. $u_n \sim \ln(\ln(n))$.

Exercice 1.8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ : \quad H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

On fixe un tel γ .

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n := H_n - \ln(n) - \gamma$.

(a) Déterminer un équivalent de $v_n - v_{n-1}$.

(b) Montrer que $v_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a ainsi établi que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

indication

1. En posant $u_n := H_n - \ln(n)$, montrer que $(u_n)_n$ est bornée et monotone, en exploitant une comparaison série intégrale.
2. (a) Faire un développement limité.
(b) Utiliser le théorème de sommation des restes pour montrer que

$$v_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$

puis retrouver un équivalent de ce reste par comparaison série-intégrale.

Exercice 1.9

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $r_n(5)$ le reste dans la division euclidienne de n par 5, et $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{r_n(5)}{n(n+1)}$ converge.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum_{k=1}^{5n} \frac{r_k(5)}{k(k+1)}$ en fonction de H_n et H_{5n} .
(b) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n(5)}{n(n+1)}$.

indication

1. Utiliser que $0 \leq r_n(5) < 5$ et conclure par comparaison pour les séries à termes positifs.
2. (a) Écrire $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, puis dans la somme $\sum_{k=1}^{5n} r_k(5) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$, décaler l'indice de la seconde partie (poser $j = k+1$) pour faire apparaître $r_k(5) - r_{k-1}(5)$. Remarquer que cette différence vaut 1 sauf lorsque k est multiple de 5, où elle vaut -4 .
(b) La série converge d'après la question 1, donc la suite des sommes partielles converge vers sa somme ; en particulier la sous-suite extraite aux rangs $5n$ également. Utiliser ensuite l'équivalent $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ pour obtenir la limite de $H_{5n} - H_n$.

résultat

2. (a) $\sum_{k=1}^{5n} \frac{r_k(5)}{k(k+1)} = H_{5n} - H_n$.
(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n(5)}{n(n+1)} = \ln(5)$.