

Colle 1

Séries numériques

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous avez une semaine pour faire ce travail et le déposer dans mon casier ou en ligne.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 1.1

Soit $\alpha > 1$.

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 1.2

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n^2}$.

Exercice 1.3

Pour une fonction continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit :

$$c_k(g) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} g(x) dx.$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π -périodique.

1. Justifier que $(c_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k(f') = ik c_k(f)$.
3. Montrer que $\sum_{k \geq 0} c_k(f)$ converge absolument et que :

$$\forall M \in \mathbb{N}^*, \quad \exists C \in \mathbb{R}_+ : \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=N}^{+\infty} |c_k(f)| \leq \frac{C}{N^M}.$$

Exercice 1.4

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Montrer que $\sum_n u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 1.5

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\sum_n \frac{1}{(pn)!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 1.6

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin(u_n). \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer un équivalent de u_n .

Indication. On pourra commencer par chercher $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_n$ converge.

Exercice 1.8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ : \quad H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

On fixe un tel γ .

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n := H_n - \ln(n) - \gamma$.

(a) Déterminer un équivalent de $v_n - v_{n-1}$.

(b) Montrer que $v_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a ainsi établi que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 1.9

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $r_n(5)$ le reste dans la division euclidienne de n par 5, et $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{r_n(5)}{n(n+1)}$ converge.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum_{k=1}^{5n} \frac{r_k(5)}{k(k+1)}$ en fonction de H_n et H_{5n} .
(b) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n(5)}{n(n+1)}$.

Exercice 1.7

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{e^{-u_n}}{n}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer un équivalent de u_n .

Indication. On pourra commencer par déterminer un équivalent de $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$.