

Remise à niveau • INDICATIONS

Algèbre

Table des matières

Nombres complexes	2
Polynômes	5
Espaces vectoriels	8
Applications linéaires : noyau, image, rang	12
Calcul matriciel	15
Applications linéaires et matrices	18
Déterminants	21
Inversion de matrices	22
Changement de base	23
Systèmes linéaires	26
Diagonalisation de matrices	27

Nombres complexes

Exercice 11 ★ Vrai ou faux ?

1. Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ alors $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$.
2. Si a et b sont complexes alors $a + ib = 0 \implies a = 0$ et $b = 0$.
3. Si $z \in \mathbb{R}$ alors $|z| = z$ ou $-z$.
4. $e^{i\theta} = 1 \iff \theta = 0$.
5. Tout nombre complexe non nul a n racines n -ièmes distinctes.

résultat

1. Faux : ceci n'est vrai que si l'on suppose de plus $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Faux : ceci n'est vrai que si l'on suppose de plus $a, b \in \mathbb{R}$ (par exemple $a = 1$ et $b = i$ donnent $a + ib = 0$ avec $a \neq 0$).
3. Vrai.
4. Faux : on a en réalité $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.
5. Vrai.

Exercice 12 ★

Calculer le module et un argument de

1. $z = 1 - i\sqrt{3}$
2. $z = (1 - i)^n, n \in \mathbb{N}$
3. $z = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}}$

résultat

1. $|z| = 2$ et $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.
2. $|z| = 2^{n/2}$ et $\arg(z) \equiv -\frac{n\pi}{4} [2\pi]$.
3. Lorsque $\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \neq 0$, on a $z = \frac{\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \in \mathbb{R}$, donc $|z|$ vaut la valeur absolue de cette quantité, et $\arg(z) \in \{0, \pi\}$ selon son signe.

Exercice 13 ★

Déterminer les nombres complexes z tels que $z, 1 - z$ et $\frac{1}{z}$ aient le même module.

résultat

$$z \in \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\} = \{e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}.$$

Exercice 14 ★★ Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 - 4i)z + 3 + 7i = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 - 4i)z - 5 + i = 0$.

indication

Pour une équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, puis on cherche une racine carrée $\delta = x + iy$ de Δ en résolvant le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \Re(\Delta) \\ 2xy = \Im(\Delta) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| \end{cases}$$

(la troisième équation provenant du module de $\delta^2 = \Delta$). Les deux premières et la troisième donnent x^2 et y^2 , puis le signe de $2xy$ permet de choisir les signes de x et y de façon cohérente. Les solutions de l'équation sont alors

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

résultat

1. $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -2 + 5i$.
2. $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -2 + 3i$.

Exercice 15 ★★

1. Linéariser $\cos^4(x)$, c'est-à-dire écrire $\cos^4(x)$ sous la forme d'une somme de termes de la forme $a \cos(nx)$ et $b \sin(nx)$.
2. Exprimer $\sin(4x)$ comme un produit de $\cos(x)$ par des puissances de $\sin(x)$.

indication

1. Utiliser les formules d'Euler : $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.
Le binôme de Newton permet de développer la somme d'exponentielles à la puissance 4.
2. Utiliser la formule de trigonométrie « $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$ ».

résultat

1. $\cos^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$.
2. $\sin(4x) = 4 \sin(x) \cos(x) (1 - 2 \sin^2(x))$.

Exercice 16 ★★★

Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \sin(a + kb).$$

indication

- ♦ Pour S_1 , commencer par calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k$.
- ♦ Pour S_2 , commencer par calculer $\sum_{k=0}^n e^{i(a+kb)} = e^{ia} \sum_{k=0}^n (e^{ib})^k$.

résultat

$$S_1 = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$
$$S_2 = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \sin\left(a + \frac{nb}{2}\right) & \text{si } b \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ (n+1) \sin(a) & \text{si } b \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Exercice 17 ★★

Montrer que le polynôme $X^4 + 1$ se factorise sur l'ensemble des nombres réels en produit de deux polynômes du second degré.

indication

On pourra chercher les racines complexes de $X^4 + 1$ (i.e. résoudre $z^4 = -1$ dans $\mathbb{C}$), puis regrouper les racines conjuguées deux à deux pour faire apparaître des facteurs réels du second degré.

résultat

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).$$

Polynômes

Exercice 18 ★

1. Deux polynômes de même degré ayant les mêmes racines avec le même ordre de multiplicité sont-ils égaux ?
2. Soit $P = X^n - 1$. Quelles sont les racines de P ?
3. Vrai/faux : un polynôme de degré 3 a au moins une racine réelle.
4. Pourquoi la fonction sinus n'est pas une fonction polynômiale ? (Plusieurs arguments)

résultat

1. Faux en général : ils sont égaux à une constante multiplicative non nulle près (ils sont égaux dès qu'on suppose de plus que leurs coefficients dominants coïncident, par exemple s'ils sont tous deux unitaires).
2. Les racines de P sont les n racines n -ièmes de l'unité :
$$\left\{ e^{2ik\pi/n} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$
3. Vrai : un polynôme réel de degré impair admet toujours au moins une racine réelle.
4. Plusieurs arguments sont possibles :
 - ◆ la fonction sinus est bornée sur $\mathbb{R}$, alors qu'un polynôme non constant ne l'est pas ;
 - ◆ la fonction sinus admet une infinité de racines ($k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), alors qu'un polynôme non nul n'en admet qu'un nombre fini (au plus son degré) ;
 - ◆ la fonction sinus est périodique, alors qu'aucun polynôme non constant ne peut être périodique.

Exercice 19 ★

1. Effectuer la division euclidienne de
$$A = 3X^5 + 4X^2 + 1 \quad \text{par} \quad B = X^2 + 2X + 3.$$
2. Effectuer la division selon les puissances croissantes de
$$A = 1 - 2X + X^3 + X^4 \quad \text{par} \quad B = 1 + 2X + X^2$$
à l'ordre 2.

résultat

1. Le quotient est $Q = 3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$ et le reste est $R = -41X - 47$.
2. À l'ordre 2, le quotient est $Q = 1 - 4X + 7X^2$, avec
$$A = BQ + X^3(-9 - 6X).$$

Exercice 20 ★ PGCD de polynômes

On considère les polynômes :

$$A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6.$$

1. Calculer le PGCD de A et B , que l'on notera D .
2. Trouver des polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.

résultat

1. $D = X^2 + 3X + 2 = (X + 1)(X + 2)$.
2. On peut prendre $U = \frac{X - 3}{18}$ et $V = \frac{-X^2 + 2X + 5}{18}$.

Exercice 21 ★★

Pour quelle(s) valeur(s) de a le polynôme $(X + 1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

indication

Une racine réelle x de $P := (X + 1)^7 - X^7 - a$ est multiple si et seulement si $P(x) = 0$ et $P'(x) = 0$. On pourra commencer par chercher les racines réelles de P' , indépendamment de a (qui disparaît par dérivation), avant de déterminer la valeur de a correspondante grâce à $P(x) = 0$.

résultat

$a = \frac{1}{64}$: l'unique valeur pour laquelle $x = -\frac{1}{2}$ est racine double.

Exercice 22 ★★★ Polynômes de Tchebychev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n.$$

1. Expliciter T_2 et T_3 .
2. Déterminer le degré du polynôme T_n ainsi que son coefficient dominant.
3. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

indication

1. Le conjecturer avec les premières valeurs de n , puis le démontrer par récurrence.
2. Raisonner par récurrence double et utiliser la formule

$$\cos((n + 2)\theta) = 2 \cos(\theta) \cos((n + 1)\theta) - \cos(n\theta).$$

résultat

1. $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$.
2. $\deg(T_n) = n$.
Pour $n \geq 1$, le coefficient dominant de T_n vaut 2^{n-1} (et vaut 1 pour $n = 0$).

Exercice 23 ★ ★ Décomposition en éléments simples

On pose $Q_0 = (X - 1)(X - 2)^2$, $Q_1 = X(X - 2)^2$, $Q_2 = X(X - 1)$.

1. Trouver la décomposition en éléments simples de $F := \frac{1}{X(X - 1)(X - 2)^2}$.
2. À l'aide de cette décomposition, trouver des polynômes A_0 , A_1 et A_2 tels que :
$$A_0 Q_0 + A_1 Q_1 + A_2 Q_2 = 1.$$
3. En utilisant vos connaissances en arithmétique dans $\mathbb{R}[X]$, que pouvez-vous en déduire sur Q_0 , Q_1 et Q_2 ?

indication

1. ♦ Commencer par écrire la forme de la décomposition en éléments simples :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X - 2} + \frac{d}{(X - 2)^2}, \quad \text{avec } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

- ♦ Déterminer les coefficients a , b et d par multiplication puis évaluation.
- ♦ Déterminer le coefficient c à l'aide d'un passage à la limite.

2. Multiplier la décomposition précédemment trouvée par $X(X - 1)(X - 2)^2$.
3. Utiliser le théorème de Bézout.

résultat

1.
$$\frac{1}{X(X - 1)(X - 2)^2} = -\frac{1}{4X} + \frac{1}{X - 1} - \frac{3}{4(X - 2)} + \frac{1}{2(X - 2)^2}.$$

2. On peut prendre :

$$A_0 = -\frac{1}{4}, \quad A_1 = 1 \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{3}{4}X + 2.$$

3. Les polynômes Q_0 , Q_1 , Q_2 sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Espaces vectoriels

Exercice 52 ★ Vrai ou Faux ?

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel de dimension n .

1. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F \cup G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E .
2. Une famille génératrice de E à n éléments est une base de E .
3. $\mathbb{R}_p[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à p . C'est un espace vectoriel de dimension p .
4. Si F est un sous-espace vectoriel de E et $\dim F = \dim E$ alors $E = F$.
5. La notation $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ signifie que $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de E .
6. Une famille de $n + 1$ vecteurs de E est nécessairement liée.

résultat

1. Faux. On peut prendre $F = \text{Vect}((1, 0))$ et $G = \text{Vect}((0, 1))$.
2. Vrai.
3. Faux. On a $\dim(\mathbb{R}_p[X]) = p + 1$.
4. Faux. On peut écrire $\text{Vect}((1, 1), (2, 2))$ ou $\text{Vect}((1, -1), (-1, 1))$.
5. Vrai.

Exercice 53 ★

Soient les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u_1 , u_2 et u_3 sont linéairement indépendants.

indication

Montrer que le système

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + 5z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

admet uniquement $(0, 0, 0)$ pour solution.

Exercice 54 ★

Soient les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u_1 , u_2 et u_3 sont linéairement dépendants.

indication

Montrer que le système

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 0 \\ y + z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

admet des solutions non nulles.

résultat

L'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 0 \\ y + z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

est Vect $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 55 ★

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

$$G_a := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; x - 3y = a \right\}$$

1. L'ensemble G_0 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui, donner une base de G_0 et sa dimension.
2. L'ensemble G_2 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

résultat

1. L'ensemble G_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ en forme une base.

2. L'ensemble G_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car ne contient pas le vecteur nul.

Exercice 56 ★

Soit H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 2t = 0 \end{cases} \right\}.$$

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la forme générale des éléments de H .
3. Donner une famille génératrice de H , une base et la dimension de H .

indication

1. On peut écrire H comme une intersection d'hyperplans, ou utiliser la définition.

résultat

$$H = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \dim(H) = 2.$$

Exercice 57 ★ Hyperplans

Donner une famille génératrice, une base, la dimension et la forme générale des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0 \right\}.$
2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0 \right\}.$
3. $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \right\}, \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$
4. $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid ax - y + bz + ct = 0 \right\}, \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$

résultat

Ces quatre espaces sont des hyperplans.

1. $A = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \dim(A) = 1.$
2. $B = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \dim(B) = 2.$
3. $C = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \dim(C) = 2.$
4. $D = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \dim(D) = 3.$

Exercice 58 ★

1. On rappelle que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère les ensembles :

$$A = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x) \right\}$$

et $B = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x) \right\}.$

(a) Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

(b) Sont-ils en somme directe ?

2. On considère les ensembles :

$$A = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \right\}.$$

(a) Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

(b) Sont-ils en somme directe ?

résultat

1. Les sous-espaces vectoriels A (fonctions continues paires) et B (fonctions continues impaires) sont en somme directe.
2. Les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ A et B ne sont pas en somme directe.

Exercice 59 ★★

On pose $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on considère les deux sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$F_1 = \left\{ P \in E \mid P(0) = P(1) = 0 \right\} \quad \text{et} \quad F_2 = \left\{ P \in E \mid \deg(P) \leq 1 \right\}.$$

Après avoir montré que F_1 et F_2 sont bien des espaces vectoriels, montrer que $F_1 \oplus F_2 = E$.

indication

- ◆ Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, en se donnant $P = aX + b \in F_1 \cap F_2$ (de degré 1 car $P \in F_2$) et montrer que $a = b = 0$ en utilisant que $P \in F_1$.
- ◆ Montrer que $F_1 + F_2 = E$, en se donnant $P \in E$, puis en effectuant la division euclidienne de P par $X(X-1)$, et montrer que le reste est dans F_2 .

Applications linéaires : noyau, image, rang

Exercice 60 ★

Soit $f : (x, y) \mapsto (x - y, y + 2x, x)$.

1. Déterminer l'ensemble de départ et celui d'arrivée de f .
2. Montrer que f est une application linéaire.

résultat

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Exercice 61 ★

Soit $f : (x, y) \mapsto (2x, x - y + 3)$. L'application f est-elle linéaire ?

résultat

Non, car $f((0, 0)) = (0, 3) \neq (0, 0)$.

Exercice 62 ★

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y + 2z, y + z, x + 2y + 3z).$$

1. Déterminer $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$ et $\text{rg}(f)$.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

résultat

1. $\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$,
donc $\text{rg}(f) = 2$.
2. L'application f n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.

Exercice 63 ★★

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
2. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $M^n = 0_3$.

indication

2. Remarquer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, donc $f \circ f = 0_{L(\mathbb{R}^3)}$ (à comprendre).

résultat

$$1. \text{Ker}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \text{Im}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 64 ★ ★ ★

Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels. On considère :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto X^2 P'' - (X+1)P' - 3P. \end{cases}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
3. A-t-on $\mathbb{R}_3[X] = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$? En déduire une nouvelle base de $\mathbb{R}_3[X]$.

indication

1. Il faut vérifier la linéarité, mais aussi s'assurer que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. ♦ Pour le noyau, se donner $P = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ tel que $f(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$.
Puisque $f(P) = (-3a_0 - a_1) + (-4a_1 - 2a_2)X + (-3a_2 - 3a_3)X^3$, on aboutit au système :

$$\begin{cases} -3a_0 - a_1 = 0 \\ -4a_1 - 2a_2 = 0 \\ -3a_2 - 3a_3 = 0. \end{cases}$$
 ♦ Pour l'image, calculer $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$ et $f(X^3)$ pour obtenir une famille génératrice de l'image, et en extraire une base.
3. ♦ Commencer par étudier les dimensions : $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 3$.
♦ Étudier l'intersection $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.
En prenant $P = \lambda(1 - 3X + 6X^2 - 6X^3) \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on montre que $\lambda = 0$ car $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.
♦ Conclure en prenant une base adaptée à la décomposition en somme directe, obtenue par concaténation.

résultat

2. $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1 - 3X + 6X^2 - 6X^3)$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.
3. On a $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ et la famille $(1, X, X^2, 1 - 3X + 6X^2 - 6X^3)$ est une base de E .

Exercice 65 ★★

Soit

$$E = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \right\}.$$

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et en donner une base.
2. Démontrer que l'application

$$D : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{cases}$$

est un automorphisme de E .

NB : un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

3. Déterminer D^{-1} et $(\text{Id}_E - D)^3$.

résultat

3. ♦ $D^{-1} : \left(x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x \right) \mapsto \left(x \mapsto (ax^2 + (b - 2a)x + (2a - b + c))e^x \right).$
♦ $(\text{Id}_E - D)^3 = 0.$

Calcul matriciel

Exercice 66 ★

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A + B$ et $-2A + 3B$.
2. Calculer AB et BA . Conclure.

résultat

1. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ et $-2A + 3B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$.
2. $AB = \begin{pmatrix} -3 & 13 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$. Le produit matriciel n'est pas commutatif.

Exercice 67 ★

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB , BA , AC , CA , BC , CB et ABC si c'est possible.

résultat

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 26 \\ 2 & 13 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -4 & 12 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ABC = \begin{pmatrix} -19 & 64 \\ -11 & 35 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Les autres produits ne sont pas possibles.

Exercice 68 ★★

Soient P et Q deux matrices réelles, carrées de dimension n .
Montrer que $\text{Tr}(PQ) = \text{Tr}(QP)$.

Exercice 69 ★★★

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

1. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

indication

2. On a $A = B + I_3$ avec B et I_3 deux matrices qui commutent, donc on peut utiliser le binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k}.$$

résultat

1. $B^0 = I_3$, $B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \geq 3$, $B^n = 0_3$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 70 ★ ★ ★ Calcul des puissances d'une matrice

On considère les deux matrices G et J de $M_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une expression générale de J^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer G en fonction de I_3 et J .
3. Dédire des questions précédentes une expression générale de G^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

indication

3. Utiliser le binôme de Newton avec I_3 et J (possible car les deux matrices commutent).

résultat

1. $J^0 = I_3$ et, pour tout $n \geq 1$, $J^n = 3^{n-1} J$.
2. $G = 2I_3 + 3J$.
3. $G^n = 2^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{2k-1} 2^{n-k} \right) J = 2^n I_3 + \frac{11^n - 2^n}{3} J$.

Exercice 71 ★ ★ ★

1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Dédire de la question précédente la valeur de A^n , pour $n \geq 2$.

indication

1. Écrire $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ et la relation de division euclidienne :

$$\forall n \geq 2, \quad \exists a_n, b_n \in \mathbb{R}, \exists Q_n \in \mathbb{R}[X] : \quad X^n = (X - 1)(X - 2)Q_n + a_nX + b_n,$$

et déterminer a_n et b_n en évaluant cette relation en 1 et 2.

2. Remarquer que $A^2 - 3A + 2I_3 = (A - I_3)(A - 2I_3) = 0_3$, donc, avec la relation de division euclidienne,

$$\forall n \geq 2, \quad A^n = a_nA + b_nI_3.$$

résultat

1. $(2^n - 1)X + (2 - 2^n)$.

2. $\forall n \geq 2, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2^n & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$

Applications linéaires et matrices

Exercice 72 ★

Soit $f(x, y, z) = (x - y, 2z)$ une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer $f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_3)$ avec

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. Écrire la matrice M de l'application linéaire f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

résultat

1. $f(x_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $f(x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $f(x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}$.

2. $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}^3)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 73 ★

Déterminer les matrices représentatives des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés :

1. $f_1(x, y) = (x + 2y)$
2. $f_2(x, y, z) = (x, 0)$
3. $f_3(x, y) = (x - y, x, -2y, x + y)$
4. $f_4(x, y, z) = (x, x + 2y, x + 2z)$
5. $f_5(x) = (x, -x, 5x)$

résultat

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R})}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}^3), \mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}^2)}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}^4)}(f_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}^3), \mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}^3)}(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_{\text{can}}(\mathbb{R}^3)}(f_5) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 74 ★

Soit f l'application linéaire telle que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, x + 2y, x + 2z)$$

Donner la matrice de l'application f dans la base formée par les trois vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

résultat

En notant $\mathcal{B} := (u_1, u_2, u_3)$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 75 ★★

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - y, x + y + z).$$

1. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel $f(E)$.

2. Soit le sous-espace vectoriel

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0 \right\}$$

Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel $f(F)$.

indication

1. Calculer $f(E) = \text{Vect} \{f(u_1), f(u_2), f(u_3)\}$, puis extraire une famille libre.

2. ♦ Commencer par déterminer une base (v_1, v_2) du plan F .

$$\text{On peut prendre } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- ♦ Calculer $f(F) = \text{Vect} \{f(v_1), f(v_2)\}$.

résultat

1. $f(E) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$. On peut par exemple proposer les bases :

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right), \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right),$$

et $\dim(f(E)) = 2$.

2. $f(F) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ et $\dim(f(F)) = 2$.

Déterminants

Exercice 76 ★

Calculer les déterminants de

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5 - \lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5 - \lambda \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

indication

1. Remarquer que les colonnes de M_1 sont liées : $C_1 = C_3$.
2. Développer par rapport à la troisième ligne.
On peut même commencer faire l'opération $C_4 \leftarrow C_4 - 2C_1$ avant d'entamer le calcul.
3. Développer par rapport à la troisième colonne.
4. Faire des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes pour faire apparaître des 0, puis développer suivant la ligne ou la colonne contenant le plus de 0.

résultat

$$\det(M_1) = 0, \quad \det(M_2) = 26, \quad \det(M_3) = -(\lambda + 5)(\lambda + 2)(\lambda - 1), \quad \det(M_4) = 21.$$

Exercice 77 ★★★

Soit

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Trouver, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation entre D_n , D_{n+1} et D_{n+2} .

indication

Développer par rapport à la première colonne.

résultat

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_{n+2} = (a+b)D_{n+1} - abD_n.$$

Inversion de matrices

Exercice 78 ★

Inverser les matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

indication

Utiliser la méthode de la « matrice augmentée » : écrire la matrice à gauche de la matrice identité, et faire des opérations sur la matrice de gauche pour la transformer en l'identité.

résultat

$$M_1 \text{ n'est pas inversible,} \quad M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 79 ★★

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $M^3 + 6M^2 + 3M - 10I_3$.
2. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1} .

résultat

$$1. \quad M^2 = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 21 & 42 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 18 & 0 \\ -9 & -17 & 0 \\ -117 & -234 & -125 \end{pmatrix}, \quad \text{donc}$$

$$M^3 + 6M^2 + 3M - 10I_3 = 0_3.$$

$$2. \quad M^{-1} = \frac{1}{10}(M^2 + 6M + 3I_3) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 25 & 30 & 0 \\ -15 & -20 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Changement de base

Exercice 80 ★

Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ avec :

$$C = \begin{pmatrix} f_1 = e_1 + e_2 \\ f_2 = e_1 + e_3 \\ f_3 = e_2 + 2e_3 \end{pmatrix}$$

résultat

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 81 ★★

Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. (a) Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ avec :

$$C = \begin{pmatrix} f_1 = e_3 \\ f_2 = e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 = 2e_1 - e_2 \end{pmatrix}$$

(b) Que constate-t-on ?

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)^n$ puis la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^n$.

indication

- La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ donne $u(e_1)$, $u(e_2)$ et $u(e_3)$. On peut ainsi calculer $u(f_1)$, $u(f_2)$ et $u(f_3)$.
- ♦ Faire un changement de base : calculer $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$, puis, en exprimant e_1 , e_2 et e_3 en fonction de f_1 , f_2 et f_3 par résolution d'un système, ou par calcul classique d'inverse, exprimer $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$.
♦ La formule de changement de base donne :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}},$$

puis, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^n = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)^n P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}.$$

résultat

1. $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \text{Diag}(-5, -2, 1)$.

2. $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)^n = \text{Diag}((-5)^n, (-2)^n, 1)$ et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 - (-2)^n & 2 - 2(-2)^n & 0 \\ (-2)^n - 1 & 2(-2)^n - 1 & 0 \\ (-5)^n - (-2)^n & 2(-5)^n - 2(-2)^n & (-5)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 82 ★★ ★ Racine carrée d'une matrice

On dit qu'une matrice Δ de $M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée d'une matrice M si et seulement si $\Delta^2 = M$. Le but de cet exercice est de calculer une racine carrée de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cette matrice A représente un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique.

1. Donner la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$ formée des trois vecteurs :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer une racine carrée de cette matrice D .

3. En déduire une racine carrée de A .

Indication. On pourra remarquer que $P^{-1}A^2P = P^{-1}AP P^{-1}AP$.

résultat

1. $D = \text{Diag}(0, 1, 4)$.

2. La matrice $\text{Diag}(0, 1, 2)$ convient.

3. La matrice $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ convient.

Exercice 83 ★

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.

2. Calculer la matrice de f par rapport à cette base $\mathcal{B}'$.

indication

1. Montrer que la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre, en utilisant la liberté de la famille (e_1, e_2, e_3) .
Si l'on se donne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0$, la liberté de la famille (e_1, e_2, e_3) donne le système suivant :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

2. Calculer Ae'_1 , Ae'_2 et Ae'_3 .

résultat

2. $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{Diag}(1, 2, 3)$

Systèmes linéaires

Exercice 84 ★

Résoudre les systèmes (S) suivants :

1.
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ 17x + 6y - 5z = c \end{cases} \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

résultat

1. $\emptyset$.

$$2. \begin{cases} \left\{ \left(\frac{3a + 2b + 7\lambda}{13}, \frac{3b - 2a - 9\lambda}{13}, \lambda \right) ; \lambda \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } c = 3a + 4b \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 85 ★★★

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x + by + az = 1 \\ ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b. \end{cases}$$

résultat

Le système admet des solutions lorsque :

$$\begin{aligned} &a = 1 \text{ et } b = 1 \\ &a = -2 \text{ et } b = -2 \\ &a \notin \{1, -2\} \text{ et } b \neq 0. \end{aligned}$$

Diagonalisation de matrices

Exercice 86 ★

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique $P(X) = \det(A - XI_3)$.
2. Déterminer les valeurs propres de A c'est-à-dire les racines du polynôme caractéristique. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une base de vecteurs propres.
4. En déduire une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $A = P.D.P^{-1}$.

indication

1. Faire l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ pour factoriser par $(1 - X)$, puis développer par rapport à la dernière colonne (contenant un 0).

résultat

1. $P(X) = -X^3 - X^2 + 10X - 8 = -(X + 4)(X - 1)(X - 2)$.
2. $\text{Sp}(A) = \{-4, 1, 2\}$.
3. $E_{-4}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.
4. $P = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 \\ -15 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 87 ★★★

Soit m un nombre réel. Soit f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 - m & m - 2 & m \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f_m ?
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A_2^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.

résultat

1. $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) = \{1, 2, m\}$.
2. La matrice A est diagonalisable pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. $A_2^0 = I_3$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_2^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ -2^k & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.