

Remise à niveau • CORRECTIONS

Algèbre

Exercice 12	2
Exercice 13	3
Exercice 14 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$	4
Exercice 16	6
Exercice 17	7
Exercice 19	8
Exercice 20 PGCD de polynômes	10
Exercice 21	12
Exercice 23 Décomposition en éléments simples	13
Exercice 65	15
Exercice 83	17
Exercice 84	19
Exercice 85	21
Exercice 87	23

Exercice 12 ★

Calculer le module et un argument de

1. $z = 1 - i\sqrt{3}$
2. $z = (1 - i)^n, n \in \mathbb{N}$
3. $z = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}}$

correction

1. ► On a $|z|^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$, donc $|z| = 2$.

► En factorisant par le module, on obtient :

$$z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\pi/3}.$$

2. ► On détermine d'abord le module et un argument de $1 - i$:

$$|1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

et, en factorisant par ce module,

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

► Par conséquent :

$$z = (1 - i)^n = (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n = (\sqrt{2})^n e^{-in\pi/4} = 2^{n/2} e^{-in\pi/4}.$$

3. ► On commence par factoriser par l'angle moitié le numérateur et le dénominateur de la fraction :

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

$$1 + e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \right) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

► En supposant $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \neq 0$ (i.e. $\alpha + \beta \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$), le facteur $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ se simplifie et il reste :

$$z = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \in \mathbb{R}.$$

► Puisque z est réel, on distingue deux cas selon son signe (en supposant $z \neq 0$, i.e. $\alpha - \beta \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$) :

$$\text{si } z \geq 0 : |z| = z \text{ et } \arg(z) = 0 \pmod{2\pi}; \quad \text{si } z < 0 : |z| = -z \text{ et } \arg(z) = \pi \pmod{2\pi}.$$

► CONCLUSION.

$$z = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}, \quad |z| = \left| \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \right|, \quad \arg(z) \in \{0, \pi\} \text{ selon le signe de } z.$$

Exercice 13 ★

Déterminer les nombres complexes z tels que z , $1 - z$ et $\frac{1}{z}$ aient le même module.

correction

Raisonnons par analyse-synthèse.

ANALYSE.

► Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = |1 - z| = \left| \frac{1}{z} \right|$.

► Écrivons $z = Re^{i\theta}$ avec $R \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Puisque $\frac{1}{z}$ est défini, alors $R > 0$.

► On a $|z| = R$ et $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{R}$, ce qui donne $R = \frac{1}{R}$ i.e. $R^2 = 1$. Puisque $R > 0$, cela donne $R = 1$.

► En factorisant par l'angle moitié, on a :

$$|1 - z| = |1 - e^{i\theta}| = \underbrace{|e^{i\frac{\theta}{2}}|}_{=1} |e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}|,$$

donc, par les formules d'Euler,

$$|1 - z| = |-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)| = 2 \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|,$$

et, puisque $\theta \in [0, 2\pi]$, on a $\frac{\theta}{2} \in [0, \pi]$, donc $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$, d'où :

$$|1 - z| = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

► Puisque $1 = R = |1 - z|$, on a donc $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$, ce qui équivaut, pour $\frac{\theta}{2} \in [0, \pi]$, à :

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{\theta}{2} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{i.e.} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{5\pi}{3}.$$

► Ainsi, $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $z = e^{5i\frac{\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

SYNTHÈSE.

► Réciproquement, soit $z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

► On a immédiatement $|z| = 1$ et $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = 1$.

► De plus, $1 - z = \frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $|1 - z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$.

► Les trois modules $|z|$, $|1 - z|$ et $\left| \frac{1}{z} \right|$ valent donc bien 1 : les deux valeurs de z conviennent.

CONCLUSION.

L'ensemble des solutions est :

$$\left\{ e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}} \right\} = \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Exercice 14 ★★ Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 - 4i)z + 3 + 7i = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 - 4i)z - 5 + i = 0$.

correction

1. ► Le discriminant de l'équation vaut :

$$\Delta = (1 - 4i)^2 - 4(3 + 7i) = (-15 - 8i) - (12 + 28i) = -27 - 36i.$$

- Cherchons $\delta = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, tel que $\delta^2 = \Delta$. On a le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -27 \\ 2xy = -36 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{27^2 + 36^2} = \sqrt{2025} = 45. \end{cases}$$

- Des deux équations $x^2 - y^2 = -27$ et $x^2 + y^2 = 45$, on tire $x^2 = 9$ et $y^2 = 36$, donc

$$x = \pm 3 \quad \text{et} \quad y = \pm 6.$$

Puisque $2xy = -36 < 0$, x et y sont de signes opposés. On peut donc prendre :

$$\delta = 3 - 6i.$$

On vérifie que $\delta^2 = 9 - 36 - 36i = -27 - 36i = \Delta$.

- Les solutions de l'équation sont donc :

$$z = \frac{-(1 - 4i) \pm \delta}{2} = \frac{(-1 + 4i) \pm (3 - 6i)}{2}.$$

- On obtient :

$$z_1 = \frac{(-1 + 3) + (4 - 6)i}{2} = 1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(-1 - 3) + (4 + 6)i}{2} = -2 + 5i.$$

- CONCLUSION. L'ensemble des solutions est $\{1 - i, -2 + 5i\}$.

On peut vérifier ce résultat en calculant

$$z_1 + z_2 = -1 + 4i = -(1 - 4i) \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = (1 - i)(-2 + 5i) = 3 + 7i,$$

conformément aux relations coefficients-racines.

2. ► Le discriminant de l'équation vaut :

$$\Delta = (1 - 4i)^2 - 4(-5 + i) = (-15 - 8i) - (-20 + 4i) = 5 - 12i.$$

- Cherchons $\delta = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, tel que $\delta^2 = \Delta$. On a le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13. \end{cases}$$

- Des deux équations $x^2 - y^2 = 5$ et $x^2 + y^2 = 13$, on tire $x^2 = 9$ et $y^2 = 4$, donc

$$x = \pm 3 \quad \text{et} \quad y = \pm 2.$$

Puisque $2xy = -12 < 0$, x et y sont de signes opposés. On peut donc prendre :

$$\delta = 3 - 2i.$$

On vérifie que $\delta^2 = 9 - 4 - 12i = 5 - 12i = \Delta$.

► Les solutions de l'équation sont donc :

$$z = \frac{-(1 - 4i) \pm \delta}{2} = \frac{(-1 + 4i) \pm (3 - 2i)}{2}.$$

► On obtient :

$$z_1 = \frac{(-1 + 3) + (4 - 2)i}{2} = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(-1 - 3) + (4 + 2)i}{2} = -2 + 3i.$$

► CONCLUSION. L'ensemble des solutions est $\{1 + i, -2 + 3i\}$.

On peut vérifier ce résultat en calculant

$$z_1 + z_2 = -1 + 4i = -(1 - 4i) \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = (1 + i)(-2 + 3i) = -5 + i,$$

conformément aux relations coefficients-racines.

Exercice 16 ★★★

Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \sin(a + kb).$$

correction

Calcul de S_1 .

► Introduisons la somme complexe :

$$T := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k,$$

de sorte que $S_1 = \Re(T)$.

► Par la formule du binôme de Newton :

$$T = (1 + e^{ix})^n.$$

► On factorise $1 + e^{ix}$ par l'angle moitié :

$$1 + e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}.$$

► On en déduit :

$$T = \left(2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{nx}{2}} = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{nx}{2}}.$$

► En prenant la partie réelle :

$$S_1 = \Re(T) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Calcul de S_2 .

► Introduisons la somme complexe :

$$U := \sum_{k=0}^n e^{i(a+kb)} = e^{ia} \sum_{k=0}^n (e^{ib})^k,$$

de sorte que $S_2 = \Im(U)$.

► CAS 1. $e^{ib} = 1$, i.e. $b \in 2\pi\mathbb{Z}$. On a $U = (n+1)e^{ia}$, d'où :

$$S_2 = (n+1) \sin(a).$$

► CAS 2. $e^{ib} \neq 1$, i.e. $\sin\left(\frac{b}{2}\right) \neq 0$. La somme géométrique donne :

$$\sum_{k=0}^n (e^{ib})^k = \frac{e^{i(n+1)b} - 1}{e^{ib} - 1}.$$

► On factorise numérateur et dénominateur par l'angle moitié :

$$e^{i(n+1)b} - 1 = e^{i\frac{(n+1)b}{2}} \left(e^{i\frac{(n+1)b}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)b}{2}} \right) = 2i \sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right) e^{i\frac{(n+1)b}{2}},$$

$$e^{ib} - 1 = e^{i\frac{b}{2}} (e^{i\frac{b}{2}} - e^{-i\frac{b}{2}}) = 2i \sin\left(\frac{b}{2}\right) e^{i\frac{b}{2}}.$$

► En simplifiant le rapport, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n (e^{ib})^k = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i\left(\frac{(n+1)b}{2} - \frac{b}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i\frac{nb}{2}}.$$

► On en déduit :

$$U = e^{ia} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i\frac{nb}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i\left(a + \frac{nb}{2}\right)}.$$

► En prenant la partie imaginaire :

$$S_2 = \Im(U) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \sin\left(a + \frac{nb}{2}\right).$$

Exercice 17 ★★

Montrer que le polynôme $X^4 + 1$ se factorise sur l'ensemble des nombres réels en produit de deux polynômes du second degré.

correction

► Recherche des racines.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^4 = -1$. Puisque $-1 = e^{i\pi}$, les solutions sont :

$$z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, \quad k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket,$$

i.e. :

$$z_0 = e^{i\pi/4}, \quad z_1 = e^{i3\pi/4}, \quad z_2 = e^{i5\pi/4}, \quad z_3 = e^{i7\pi/4}.$$

Ces quatre racines sont deux à deux distinctes, donc simples (leur nombre égale le degré de $X^4 + 1$).

► Regroupement des racines conjuguées.

On remarque que :

$$\overline{z_0} = e^{-i\pi/4} = e^{i(2\pi-\pi/4)} = e^{i7\pi/4} = z_3, \quad \text{et} \quad \overline{z_1} = e^{-i3\pi/4} = e^{i5\pi/4} = z_2.$$

On regroupe donc les racines en deux paires de conjuguées : $\{z_0, z_3\}$ et $\{z_1, z_2\}$.

► Facteur associé à $\{z_0, z_3\}$.

Puisque $|z_0| = 1$:

$$(X - z_0)(X - z_3) = (X - z_0)(X - \overline{z_0}) = X^2 - 2\Re(z_0)X + |z_0|^2 = X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1.$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient :

$$(X - z_0)(X - z_3) = X^2 - \sqrt{2}X + 1.$$

► Facteur associé à $\{z_1, z_2\}$.

De même :

$$(X - z_1)(X - z_2) = X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1.$$

Comme $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient :

$$(X - z_1)(X - z_2) = X^2 + \sqrt{2}X + 1.$$

► Les polynômes $X^4 + 1$ et $(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$ sont deux polynômes unitaires de degré 4, ayant les mêmes racines z_0, z_1, z_2, z_3 , toutes simples : ils sont donc égaux, i.e. :

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).$$

Les deux facteurs obtenus sont bien à coefficients réels, et irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ puisque leurs racines (z_0, z_3 d'une part, z_1, z_2 d'autre part) ne sont pas réelles.

Exercice 19 ★

1. Effectuer la division euclidienne de

$$A = 3X^5 + 4X^2 + 1 \quad \text{par} \quad B = X^2 + 2X + 3.$$

2. Effectuer la division selon les puissances croissantes de

$$A = 1 - 2X + X^3 + X^4 \quad \text{par} \quad B = 1 + 2X + X^2$$

à l'ordre 2.

correction

1. ► Étape 1.

Le terme dominant de $R_0 = A$ est $3X^5$, celui de B est X^2 , donc $q_1 = 3X^5/X^2 = 3X^3$. On calcule $q_1B = 3X^5 + 6X^4 + 9X^3$, d'où :

$$R_1 = R_0 - q_1B = -6X^4 - 9X^3 + 4X^2 + 1.$$

► Étape 2.

$q_2 = -6X^4/X^2 = -6X^2$. On calcule $q_2B = -6X^4 - 12X^3 - 18X^2$, d'où :

$$R_2 = R_1 - q_2B = 3X^3 + 22X^2 + 1.$$

► Étape 3.

$q_3 = 3X^3/X^2 = 3X$. On calcule $q_3B = 3X^3 + 6X^2 + 9X$, d'où :

$$R_3 = R_2 - q_3B = 16X^2 - 9X + 1.$$

► Étape 4.

$q_4 = 16X^2/X^2 = 16$. On calcule $q_4B = 16X^2 + 32X + 48$, d'où :

$$R_4 = R_3 - q_4B = -41X - 47.$$

On a $\deg R_4 = 1 < 2 = \deg B$: le processus s'arrête ici, avec $R = R_4$.

► En sommant les quotients partiels q_1, q_2, q_3, q_4 obtenus à chaque étape :

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 3X^3 - 6X^2 + 3X + 16 \quad \text{et} \quad R = -41X - 47,$$

avec $A = BQ + R$.

2. ► Étape 1.

On pose $R_0 := A$. Son terme de plus bas degré est le terme constant 1, donc $q_1 = 1/1 = 1$. On calcule $q_1B = 1 + 2X + X^2$, d'où :

$$R_1 = R_0 - q_1B = -4X - X^2 + X^3 + X^4.$$

► Étape 2.

Le terme de plus bas degré de R_1 est $-4X$, donc $q_2 = -4X/1 = -4X$. On calcule $q_2B = -4X - 8X^2 - 4X^3$, d'où :

$$R_2 = R_1 - q_2B = 7X^2 + 5X^3 + X^4.$$

► Étape 3.

Le terme de plus bas degré de R_2 est $7X^2$, de degré $2 = n$: c'est la dernière étape, avec $q_3 = 7X^2/1 = 7X^2$. On calcule $q_3B = 7X^2 + 14X^3 + 7X^4$, d'où :

$$R_3 = R_2 - q_3B = -9X^3 - 6X^4.$$

Le reste $R_3 = -9X^3 - 6X^4 = X^3(-9 - 6X)$ est bien divisible par $X^3 = X^{n+1}$: le processus s'arrête ici.

► En sommant les quotients partiels q_1, q_2, q_3 obtenus à chaque étape :

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 = 1 - 4X + 7X^2,$$

avec

$$A = B Q + X^3(-9 - 6X).$$

On retrouve ainsi le début du développement limité en 0 de

$$\frac{A}{B} = \frac{1 - 2X + X^3 + X^4}{1 + 2X + X^2},$$

qui vaut :

$$\frac{A}{B} = 1 - 4X + 7X^2 + o(X^2).$$

Exercice 20 ★ PGCD de polynômes

On considère les polynômes :

$$A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6.$$

1. Calculer le PGCD de A et B , que l'on notera D .
2. Trouver des polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.

correction

1. ► *Division de A par B .* On a $\deg A = 5$ et $\deg B = 4$. On élimine le terme dominant de A à l'aide de $X \cdot B$, puis celui du reste obtenu à l'aide de $1 \cdot B$:

$$\begin{aligned} A - X \cdot B &= X^4 - 8X^2 - 9X - 2, \\ (X^4 - 8X^2 - 9X - 2) - B &= -2X^3 - 10X^2 - 16X - 8. \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$A = Q_1 B + R_1, \quad Q_1 = X + 1, \quad R_1 = -2X^3 - 10X^2 - 16X - 8.$$

- *Division de B par R_1 .* Le quotient s'obtient en deux étapes : $X^4/(-2X^3) = -\frac{1}{2}X$, ce qui donne un premier reste intermédiaire $-3X^3 - 6X^2 + 3X + 6$; puis $-3X^3/(-2X^3) = \frac{3}{2}$, ce qui donne :

$$B = Q_2 R_1 + R_2, \quad Q_2 = \frac{3-X}{2}, \quad R_2 = 9X^2 + 27X + 18 = 9(X^2 + 3X + 2).$$

- *Division de R_1 par R_2 .* De même, on trouve :

$$R_1 = Q_3 R_2 + R_3, \quad Q_3 = -\frac{2X+4}{9}, \quad R_3 = 0.$$

- Le dernier reste non nul est donc $R_2 = 9(X^2 + 3X + 2)$. En le rendant unitaire (i.e. en divisant par son coefficient dominant 9), on obtient :

$$D = X^2 + 3X + 2 = (X+1)(X+2).$$

On peut vérifier que -1 et -2 sont bien racines communes de A et B :
 $A(-1) = B(-1) = 0$ et $A(-2) = B(-2) = 0$.

2. ► D'après la division de B par R_1 :

$$R_2 = B - Q_2 R_1.$$

- D'après la division de A par B :

$$R_1 = A - Q_1 B.$$

- En substituant cette expression de R_1 dans celle de R_2 :

$$\begin{aligned} R_2 &= B - Q_2(A - Q_1 B) \\ &= -Q_2 A + (1 + Q_1 Q_2) B. \end{aligned}$$

► Calculons $1 + Q_1 Q_2$. On a $Q_1 Q_2 = (X + 1) \frac{3 - X}{2} = \frac{-X^2 + 2X + 3}{2}$, donc :

$$1 + Q_1 Q_2 = \frac{2 - X^2 + 2X + 3}{2} = \frac{-X^2 + 2X + 5}{2}.$$

► On obtient donc :

$$R_2 = \frac{X - 3}{2} A + \frac{-X^2 + 2X + 5}{2} B.$$

► Puisque $R_2 = 9D$, il vient, en divisant par 9 :

$$D = \frac{X - 3}{18} A + \frac{-X^2 + 2X + 5}{18} B,$$

i.e. on peut prendre $U = \frac{X - 3}{18}$ et $V = \frac{-X^2 + 2X + 5}{18}$.

Exercice 21 ★★

Pour quelle(s) valeur(s) de a le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

correction

Mise en place.

► Posons $P := (X+1)^7 - X^7 - a$. Un réel x est racine multiple de P ssi $P(x) = 0$ et $P'(x) = 0$.

► On calcule :

$$P' = 7(X+1)^6 - 7X^6 = 7((X+1)^6 - X^6).$$

Remarquons que a a disparu par dérivation : les racines réelles de P' ne dépendent donc pas de a .

Recherche des racines réelles de P' .

► Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $P'(x) = 0$, i.e. $(x+1)^6 = x^6$. Pour $u, v \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$u^6 = v^6 \iff u = v \text{ ou } u = -v.$$

► En appliquant ceci à $u = x+1$ et $v = x$ (non tous deux nuls) :

$$(x+1)^6 = x^6 \iff [x+1 = x \text{ ou } x+1 = -x].$$

Le cas $x+1 = x$ est impossible. Le cas $x+1 = -x$ donne $2x = -1$, i.e. $x = -\frac{1}{2}$.

► Ainsi, P' admet donc une unique racine réelle : $x = -\frac{1}{2}$. C'est donc l'unique candidat possible pour une racine multiple réelle de P .

Détermination de a .

► Il reste à choisir a tel que $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. En notant que $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7 - a = \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 - a = 2 \times \frac{1}{128} - a = \frac{1}{64} - a.$$

La condition $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ équivaut donc à :

$$a = \frac{1}{64}.$$

► La seule valeur de a pour laquelle $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet une racine multiple réelle est :

$$a = \frac{1}{64},$$

la racine multiple correspondante étant $x = -\frac{1}{2}$.

On peut vérifier que cette racine est exactement double, en calculant

$$P''\left(-\frac{1}{2}\right) = 42\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = 42 \times \frac{1}{16} = \frac{21}{8} \neq 0.$$

Exercice 23 ★ ★ Décomposition en éléments simples

On pose $Q_0 = (X - 1)(X - 2)^2$, $Q_1 = X(X - 2)^2$, $Q_2 = X(X - 1)$.

1. Trouver la décomposition en éléments simples de $F := \frac{1}{X(X - 1)(X - 2)^2}$.
2. À l'aide de cette décomposition, trouver des polynômes A_0 , A_1 et A_2 tels que :
$$A_0 Q_0 + A_1 Q_1 + A_2 Q_2 = 1.$$
3. En utilisant vos connaissances en arithmétique dans $\mathbb{R}[X]$, que pouvez-vous en déduire sur Q_0 , Q_1 et Q_2 ?

correction

1. ► Commençons par déterminer la forme de la décomposition en éléments simples de F .

▷ Le dénominateur est scindé à racines dans $\mathbb{R}$, avec un pôle simple en 0, un pôle simple en 1, et un pôle double en 2.

▷ La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ est donc de la forme :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X - 2} + \frac{d}{(X - 2)^2}, \quad \text{avec } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

▷ Il reste à déterminer les quatre coefficients a, b, c, d .

► On cherche les coefficients des pôles simples et du pôle d'ordre maximal, par évaluation directe.

▷ Coefficient a . On multiplie par X et on évalue en $X = 0$:

$$a = \lim_{X \rightarrow 0} X F(X) = \frac{1}{(X - 1)(X - 2)^2} \Big|_{X=0} = \frac{1}{(-1) \times 4} = -\frac{1}{4}.$$

▷ Coefficient b . On multiplie par $X - 1$ et on évalue en $X = 1$:

$$b = \lim_{X \rightarrow 1} (X - 1) F(X) = \frac{1}{X(X - 2)^2} \Big|_{X=1} = \frac{1}{1 \times 1} = 1.$$

▷ Coefficient d . On multiplie par $(X - 2)^2$ et on évalue en $X = 2$:

$$d = \lim_{X \rightarrow 2} (X - 2)^2 F(X) = \frac{1}{X(X - 1)} \Big|_{X=2} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}.$$

► Pour déterminer le coefficient c , on effectue un passage à la limite en $+\infty$.

▷ On multiplie la décomposition par X :

$$X F(X) = a + \frac{bX}{X - 1} + \frac{cX}{X - 2} + \frac{dX}{(X - 2)^2}.$$

▷ Puisque $\deg(XF) = 1 - 4 = -3 < 0$, on a $X F(X) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$.

▷ De plus, $\frac{X}{X - 1} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 1$, $\frac{X}{X - 2} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 1$ et $\frac{X}{(X - 2)^2} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$.

▷ En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus :

$$0 = a + b + c,$$

d'où :

$$c = -a - b = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

► On obtient finalement :

$$\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2} = -\frac{1}{4X} + \frac{1}{X-1} - \frac{3}{4(X-2)} + \frac{1}{2(X-2)^2}.$$

2. ► En multipliant la décomposition de la question précédente par $X(X-1)(X-2)^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} 1 &= a(X-1)(X-2)^2 + bX(X-2)^2 + (c(X-2) + d)X(X-1) \\ &= aQ_0 + bQ_1 + (c(X-2) + d)Q_2. \end{aligned}$$

► On pose donc

$$A_0 = a, \quad A_1 = b \quad \text{et} \quad A_2 = c(X-2) + d,$$

ce qui donne, avec les valeurs de la question précédente :

$$A_0 = -\frac{1}{4}, \quad A_1 = 1, \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{3}{4}(X-2) + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}X + 2.$$

3. ► L'identité $A_0Q_0 + A_1Q_1 + A_2Q_2 = 1$ est une identité de Bézout. Cela montre que Q_0 , Q_1 , Q_2 sont premiers entre eux *dans leur ensemble*, i.e. que leur PGCD commun vaut 1.

► En revanche, Q_0 , Q_1 , Q_2 ne sont *pas* premiers entre eux deux à deux : par exemple,

$$Q_0 \wedge Q_1 = (X-2)^2, \quad Q_0 \wedge Q_2 = X-1 \quad \text{et} \quad Q_1 \wedge Q_2 = X.$$

Exercice 65 ★★★

Soit

$$E = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \right\}.$$

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et en donner une base.
2. Démontrer que l'application

$$D : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{cases}$$

est un automorphisme de E .

NB : un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

3. Déterminer D^{-1} et $(\text{Id}_E - D)^3$.

correction

1. ► On vérifie aisément que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
► La famille $\mathcal{F} := (x \mapsto x^2 e^x, x \mapsto x e^x, x \mapsto e^x)$ est une base de E .
▷ La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E par définition.
▷ Montrons que $\mathcal{F}$ est libre dans E . Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda x^2 e^x + \mu x e^x + \nu e^x = 0.$$

Montrons que $\lambda = \mu = \nu = 0$. En divisant par $e^x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda x^2 + \mu x + \nu = 0.$$

En particulier, en prenant $x = 0$, on obtient que $\nu = 0$. Ensuite, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda x + \mu)x = 0,$$

d'où, en prenant $x = 1$ et $x = 2$, on a :

$$\lambda + \mu = 0 \quad \text{et} \quad 2\lambda + \mu = 0,$$

donc $\lambda = 0$, puis $\mu = 0$.

Cette preuve est assez manuelle. L'argument plus général que l'on peut utiliser est la liberté de la famille de fonctions polynomiales

$$(x \mapsto x^2, x \mapsto x, x \mapsto 1).$$

2. ► L'application D est correctement définie, et est linéaire par linéarité de la dérivation.
► En effet, D est bien à valeurs dans E .
Soit $f \in E$. Fixons $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. Alors f est dérivable et,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = (ax^2 + bx + c + 2ax + b)e^x = (ax^2 + (2a + b)x + (b + c))e^x.$$

- Montrons que D est injective.

Soit $f \in E$. En supposant que $D(f) = 0$, on a, en divisant par e^x et par liberté de la famille $(x \mapsto x^2, x \mapsto x, x \mapsto 1)$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 0 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0. \end{cases}$$

Ce système triangulaire donne immédiatement que $a = b = c = 0$, donc $f = 0$.

► L'endomorphisme D étant injectif dans l'espace E de dimension finie, il est bijectif.

3. Détermination de D^{-1} .

► Soit $g \in E$. Fixons $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad g(x) = (ax^2 + bx + c)e^x.$$

► L'application D étant surjective de E dans E , cherchons $f \in E$ telle que $D(f) = g$.

► On raisonne par analyse-synthèse.

▷ On note $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x.$$

▷ Alors f est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = (\alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma))e^x.$$

▷ En identifiant dans la base de E , on obtient :

$$\begin{cases} \alpha = a \\ 2\alpha + \beta = b \\ \beta + \gamma = c, \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\alpha = a, \quad \beta = b - 2a \quad \text{et} \quad \gamma = c - \beta = 2a - b + c.$$

► Ainsi, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2 + (b - 2a)x + (2a - b + c))e^x.$$

► On vérifie que $D(f)$ avec f ainsi proposée donne bien g , ce qui conclut.

► On a donc :

$$D^{-1} : (x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x) \mapsto (x \mapsto (ax^2 + (b - 2a)x + (2a - b + c))e^x).$$

Détermination de $(\text{Id}_E - D)^3$.

► Soit $f \in E$. Fixons $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x.$$

► On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{Id}_E - D)(f)(x) = f(x) - f'(x) = (-2ax - b)e^x.$$

On remarque que $\text{Id}_E - D$ fait baisser le degré du polynôme.

► Ensuite, pour tout réel x , on a :

$$(\text{Id}_E - D)^2(f)(x) = ((-2 \times 0)x - (-2a))e^x = 2ae^x,$$

puis :

$$(\text{Id}_E - D)^3(f)(x) = ((-2 \times 0)x - 0)e^x = 0,$$

donc $(\text{Id}_E - D)^3 = 0$.

Exercice 83 ★

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.

2. Calculer la matrice de f par rapport à cette base $\mathcal{B}'$.

correction

1. ► Commençons par montrer que la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre.

► Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

► Par définition de e'_1, e'_2 et e'_3 , cette égalité s'écrit :

$$\lambda_1(2e_1 + 3e_2 + e_3) + \lambda_2(3e_1 + 4e_2 + e_3) + \lambda_3(e_1 + 2e_2 + 2e_3) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)e_1 + (3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3)e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)e_3 = 0.$$

► La famille (e_1, e_2, e_3) étant libre, on en déduit le système :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (L_1) \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (L_2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (L_3). \end{cases}$$

► On échange L_1 et L_3 pour faciliter les calculs :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (L_1) \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (L_2) \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (L_3). \end{cases}$$

► On élimine λ_1 de (L_2) et (L_3) par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (L_1) \\ \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 & (L_2) \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 & (L_3). \end{cases}$$

► On élimine λ_2 de (L_3) par l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (L_1) \\ \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 & (L_2) \\ \lambda_3 = 0 & (L_3). \end{cases}$$

► Ce système triangulaire donne, en remontant, $\lambda_3 = 0$, puis $\lambda_2 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$.

► Ainsi, la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre.

► Puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et que cette famille comporte trois vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on note $\mathcal{B}'$.

2. ► On calcule :

$$Ae'_1 = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = e'_1.$$

$$Ae'_2 = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 e'_2.$$

$$Ae'_3 = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 e'_3.$$

► Ainsi, e'_1 , e'_2 et e'_3 sont des vecteurs propres de f , associés respectivement aux valeurs propres 1, 2 et 3. Les colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ étant les coordonnées de $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ dans la base $\mathcal{B}'$, on obtient directement :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{Diag}(1, 2, 3).$$

On retrouve ainsi que A est diagonalisable, de valeurs propres 1, 2, 3, et que $\mathcal{B}'$ en est une base de vecteurs propres.

Exercice 84 ★

Résoudre les systèmes (S) suivants :

1.
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ 17x + 6y - 5z = c \end{cases} \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

correction

1. ► On considère le système :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 & (L_1) \\ 3x - 5y + z = -4 & (L_2) \\ 4x - 7y + z = 5 & (L_3). \end{cases}$$

Mettons en œuvre la méthode du pivot de Gauss pour le résoudre.

- Première étape : éliminer x dans (L_2) et (L_3) grâce au pivot de (L_1) .

On fait les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, ce qui donne :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 & (L_1) \\ -\frac{7}{2}y - \frac{7}{2}z = -\frac{35}{2} & (L_2) \\ -5y - 5z = -13 & (L_3), \end{cases}$$

d'où, en simplifiant (L_2) (pour alléger les calculs),

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 & (L_1) \\ y + z = 5 & (L_2) \\ -5y - 5z = -13 & (L_3) \end{cases}$$

- Deuxième étape : éliminer y dans (L_3) .

On fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (-5)L_2$, ce qui donne :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 & (L_1) \\ y + z = 5 & (L_2) \\ 0 = 12 & (L_3) \end{cases}$$

- La dernière ligne étant impossible, ce système n'a pas de solution.

2. ► On met en œuvre la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = a & (L_1) \\ 2x + 3y + z = b & (L_2) \\ 17x + 6y - 5z = c & (L_3). \end{cases}$$

- On commence par échanger (L_1) et (L_2) :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = b & (L_1) \\ 3x - 2y - 3z = a & (L_2) \\ 17x + 6y - 5z = c & (L_3). \end{cases}$$

► Éliminons z de (L_2) et (L_3) par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1$:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = b & (L_1) \\ 9x + 7y = a + 3b & (L_2) \\ 27x + 21y = c + 5b & (L_3). \end{cases}$$

► Éliminons x de (L_3) par l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = b & (L_1) \\ 9x + 7y = a + 3b & (L_2) \\ 0 = c - 3a - 4b & (L_3). \end{cases}$$

► Il apparaît une condition de compatibilité, ce qui nous fait distinguer deux cas.

CAS 1. $3a + 4b \neq c$.

Le système n'a pas de solution.

CAS 2. $3a + 4b = 0$.

On peut continuer le travail avec les deux premières lignes.

Après élimination, il ne reste que deux équations utiles pour trois inconnues. Il manque donc une information pour tout déterminer. On choisit alors de laisser une inconnue libre, ici z (que l'on renomme en $\lambda \in \mathbb{R}$), et on exprime les deux autres inconnues en fonction de ce paramètre.

▷ Pour éliminer x , faisons $L_1 \leftarrow 9L_1$:

$$\begin{cases} 18x + 27y + 9z = 9b & (L_1) \\ 9x + 7y = a + 3b & (L_2), \end{cases}$$

puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ pour éliminer x :

$$\begin{cases} 13y + 9z = 3b - 2a & (L_1) \\ 9x + 7y = a + 3b & (L_2). \end{cases}$$

▷ Posons $z := \lambda \in \mathbb{R}$. On obtient donc :

$$x = \frac{3a + 2b + 7\lambda}{13} \quad \text{et} \quad y = \frac{3b - 2a - 9\lambda}{13}.$$

► L'ensemble des solutions est donc :

$$\begin{cases} \left\{ \left(\frac{3a + 2b + 7\lambda}{13}, \frac{3b - 2a - 9\lambda}{13}, \lambda \right) ; \lambda \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } c = 3a + 4b \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 85 ★ ★ ★

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x + by + az = 1 \\ ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b. \end{cases}$$

correction

► On considère le système :

$$\begin{cases} x + by + az = 1 & (L_1) \\ ax + by + z = 1 & (L_2) \\ x + aby + z = b & (L_3). \end{cases}$$

► Éliminons x de (L_2) et (L_3) par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{cases} x + by + az = 1 & (L_1) \\ b(1-a)y + (1-a^2)z = 1-a & (L_2) \\ -b(1-a)y + (1-a)z = b-1 & (L_3). \end{cases}$$

► Une première disjonction de cas apparaît : $a = 1$ ou $a \neq 1$.

► Plaçons-nous dans le cas $a = 1$.

▷ Le système devient :

$$\begin{cases} x + by + z = 1 & (L_1) \\ 0 = 0 & (L_2) \\ 0 = b-1 & (L_3). \end{cases}$$

▷ Ce système admet des solutions si, et seulement si, $b = 1$ (pour garantir la véracité de (L_3)).

► Supposons désormais $a \neq 1$.

► On peut diviser (L_2) et (L_3) par $1-a$ et considérer :

$$\begin{cases} x + by + az = 1 & (L_1) \\ by + (1+a)z = 1 & (L_2) \\ -by + z = \frac{b-1}{1-a} & (L_3). \end{cases}$$

► En faisant $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on a :

$$\begin{cases} x + by + az = 1 & (L_1) \\ by + (1+a)z = 1 & (L_2) \\ (2+a)z = \frac{b-a}{1-a} & (L_3). \end{cases}$$

► Plaçons-nous dans le cas $a = -2$.

▷ La ligne (L_3) est vraie si, et seulement si, $b = a$, c'est-à-dire $b = -2$. Le système devient :

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 & (L_1) \\ -2y - z = 1 & (L_2). \end{cases}$$

▷ Ce dernier système admet un plan de solutions.

► Supposons désormais que $a \neq -2$.

▷ La ligne (L_3) permet d'exprimer z en fonction de $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$:

$$z = \frac{b-a}{(1-a)(2+a)}.$$

▷ Lorsque $b \neq 0$, la ligne (L_2) permet d'exprimer y , puis la ligne (L_1) permet d'exprimer x : le système admet alors une unique solution.

▷ Lorsque $b = 0$, la ligne (L_2) devient

$$(1+a)z = 1,$$

ce qui impose à z une valeur devant coïncider avec celle donnée par (L_3) .

En substituant $z = \frac{-a}{(1-a)(2+a)}$ dans $(1+a)z = 1$, on obtient, après simplification, l'égalité

$0 = 2$, qui est toujours fausse, quel que soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

▷ Ainsi, lorsque $b = 0$ et $a \notin \{1, -2\}$, le système n'admet aucune solution.

► Finalement, le système admet des solutions lorsque :

$$a = 1 \text{ et } b = 1$$

$$a = -2 \text{ et } b = -2$$

$$a \notin \{1, -2\} \text{ et } b \neq 0.$$

Exercice 87 ★★

Soit m un nombre réel. Soit f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f_m ?
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A_2^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.

correction

1. On a :

$$\begin{aligned} \chi_{A_m}(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 2-m & X-m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & X-2 \\ m-2 & 2-m \end{vmatrix} \\ &= (X-1)((X-2)(X-m) + 2-m) - (2-m + (X-2)(2-m)) \\ &= (X-1)((X-2)(X-m) + 2-m) - (X-1)(2-m) \\ &= (X-1)(X-2)(X-m), \end{aligned}$$

donc $\text{Sp}(A_m) = \{1, 2, m\}$.

2. ♦ Lorsque $m \neq 1, 2$, la matrice A_m admet trois valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

♦ Lorsque $m = 1$, puisque $\chi_{A_1}(X) = (X-1)^2(X-2)$, il faut vérifier la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1.

On a $E_1(A_1) = \text{Ker}(A_1 - I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, donc $\dim(E_1(A_1)) = 1$ alors que 1 est une valeur propre double de A_1 . Donc A_1 n'est pas diagonalisable.

♦ Lorsque $m = 2$, puisque $\chi_{A_2}(X) = (X-1)(X-2)^2$, il faut vérifier la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 2.

On a $E_2(A_2) = \text{Ker}(A_2 - 2I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, donc $\dim(E_2(A_2)) = 2$, donc la dimension de l'espace propre et la multiplicité de la valeur propre coïncident. Donc A_2 est diagonalisable.

3. ► La matrice A_2 est diagonalisable.

► Par calcul, on trouve $E_1(A_2) = \text{Ker}(A_2 - I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

On pose $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_2) = \text{Diag}(1, 2, 2).$$

► En notant $P_2 := \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_2 := \text{Diag}(1, 2, 2)$ on a :

$$A_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}.$$

► Par récurrence, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_2^k = P_2 D_2^k P_2^{-1}.$$

► On calcule l'inverse de P_2 par la méthode de la « matrice augmentée » :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

► La matrice D_2 étant diagonale, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D_2^k = \text{Diag}(1, 2^k, 2^k),$$

Par produit matriciel, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_2^k = \begin{cases} I_3 & \text{si } k = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ -2^k & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} & \text{sinon.} \end{cases}$$